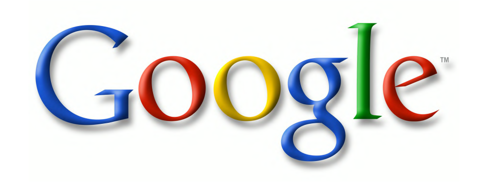
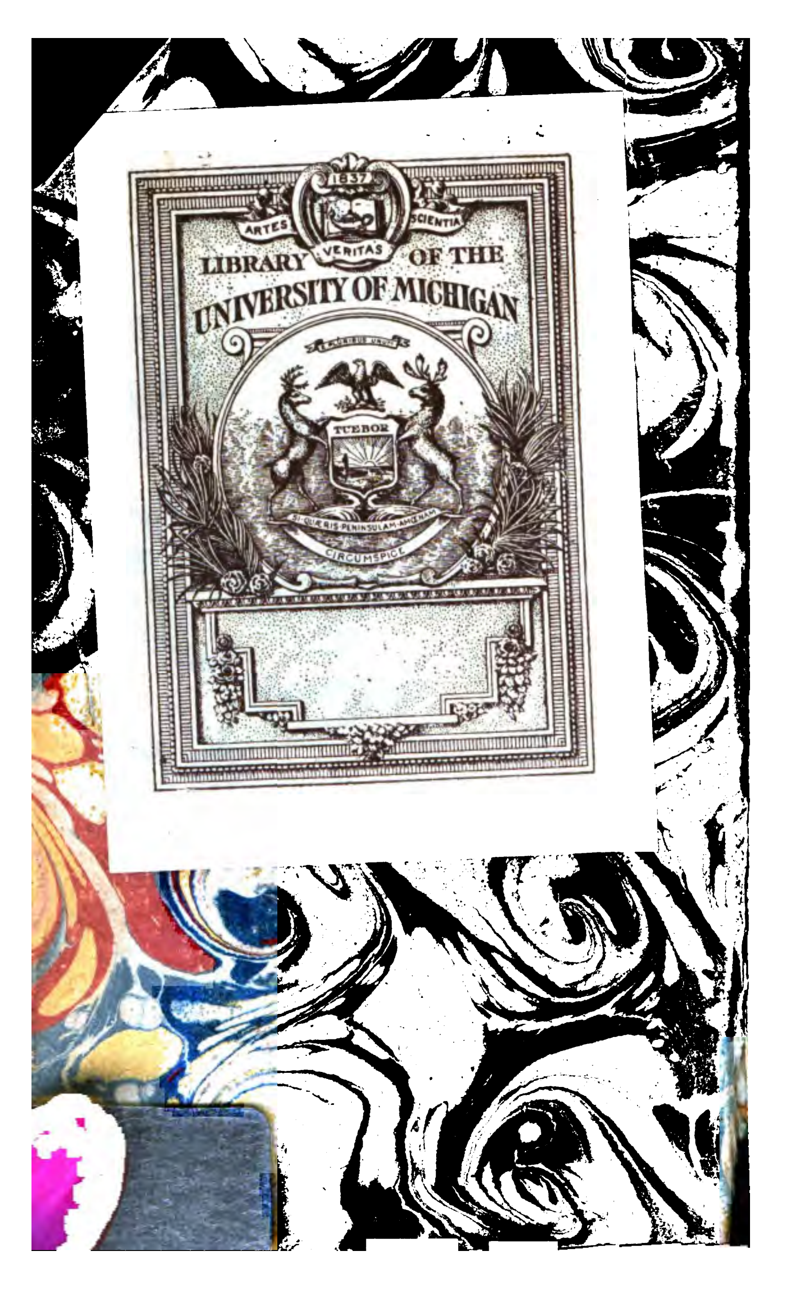



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



USAGES
DE
L'ANALYSE DE DESCARTES

Pour découvrir, sans le secours du Calcul Differentiel, les Proprietés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres.

Par JEAN PAUL DE GUA DE MALVES, *Prêtre, Trésorier de l'Eglise Collegiale, & Seculiere de S. Jean de Menigoute, Académicien de l'Académie Royale de Bordeaux.*

A PARIS,
Chez BRIASSON, Libraire, ruë S. Jacques, à la Science.
PIGET, Quai des Augustins, à l'Image S. Jacques.

M. DCC. XL.

Avec Approbation & Privilege du Roy.



A SON ALTESSE
SERENISSIME
MONSEIGNEUR
LE COMTE DE CLERMONT,

ONSEIGNEUR,

Je dois à mon application aux Mathématiques le précieux

avantage d'être connu de VOTRE ALTESSE SERENISSIME; *&* *depuis que j'ai l'honneur de l'approcher, j'ai ſouvent éprouvé les effets de la puiſſante protection qu'elle accorde à ceux qui cultivent les Sciences, ou les Arts. Animé,* MONSEIGNEUR, *par ces glorieuſes marques de la bienveillance de* VOTRE ALTESSE SERENISSIME *j'ai redoublé mes efforts pour m'en rendre digne. L'Ouvrage que je prends la liberté de lui préſenter en eſt le premier fruit. S'il ne répond pas à ce qu'un ſi grand motif auroit dû produire, au*

moins, en me donnant occasion de publier les bontés dont VOTRE ALTESSE SERENISSIME *a daigné m'honorer, il servira à encourager ceux à qui un génie heureux pourra promettre plus de succès.*

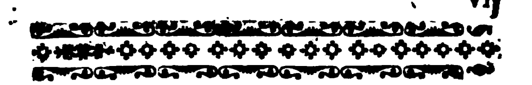
Je suis avec un très-profond respect,

MONSEIGNEUR,

DE VOTRE ALTESSE SERENISSIME

Le très-humble & très-obéissant Serviteur DE GUA DE MALVES.





PREFACE.

Rien ne satisfait davantage dans l'étude de la Géométrie que de découvrir de nouvelles verités, sur tout de ces verités singulieres que les propositions élémentaires d'où elles sont déduites n'auroient point d'abord paru renfermer : mais il n'est pas moins utile, & il est souvent aussi difficile de rappeller à leurs vrais principes des connoissances acquises par des voyes éloignées, ou peu directes ; il est même presqu'impossible qu'un pareil travail ne conduise à des découvertes particulieres ausquelles on ne seroit point parvenu par d'autres moyens.

La clarté, & la simplicité forment en effet le premier caractere des vrais principes sur lesquels les démonstrations mathematiques doivent être fondées, & par là ces principes nous donnent la facilité d'appercevoir comme d'un coup d'œil l'étendue précise des conclusions que nous en tirons ;

ils sont d'ailleurs nécessairement en petit nombre, ce qui fait que nous saisissons aisément les rapports qu'ont entr'elles toutes les propositions qui en dépendent; enfin, puisqu'ils ont immediatement leur source dans la nature de leur objet, ils sont aussi par cette raison d'une fécondité qui remplit, comme d'elle-même les vuides que laisseroient des verités détachées, qu'on pourroit devoir à des principes differens: fécondité d'où naissent naturellement ces chaînes non interrompuës de conséquences qui sont seules capables de composer un veritable corps de science.

Plus ces réfléxions paroîtront frapantes, plus aussi on devra s'étonner de ce qu'on n'a point encore essayé de se passer autant qu'il seroit possible du Calcul Differentiel dans la recherche des Proprietés, ou Affections des Lignes Géométriques. La consideration des Equations Algébriques de Degrés plus ou moins élevés fait d'un côté l'objet précis de l'Analyse de Descartes. Si d'ailleurs les Lignes Géométriques sont nommées Géométriques, si on les distingue en des Ordres

differens, c'est en tant qu'elles sont définies par des Equations. Il paroît donc suivre de-là que c'est l'Analyse de Descartes, & non celle des Infiniment Petits qui devroit fournir les moyens principaux, & les plus naturels de découvrir les proprietés de ces Lignes.

J'avouërai cependant que, par la nature même de l'Analyse de Descartes, l'usage qu'on en peut faire dans la recherche dont je parle est nécessairement borné. Entrera-t'il des expressions Differentielles dans les raports donnés d'un Problême, ou pourra-t'il entrer de semblables expressions dans les raports que la Solution de ce Problême doit déterminer? par exemple, s'agira-t'il de quelque Effection sur des Courbes Mécaniques, ou bien faudra-t'il assigner la valeur de l'Arc, ou de l'Aire d'une Courbe même Géométrique? ces deux cas, qui sont les seuls où l'illustre M. Newton ait employé le Calcul des Infinimens Petits, demanderont en effet qu'on ait nécessairement recours aux Equations Differentielles, & qu'on supplée par là au peu d'étenduë des

Equations ordinaires ; car j'évite de dire au défaut de l'Analyſe ordinaire, parce qu'il ſeroit injuſte de reprocher à une Méthode qu'elle ne donne pas les moyens de connoître ce que ſa nature ne permet pas qu'elle faſſe découvrir.

Mais il n'en eſt pas ainſi des raports que peuvent avoir les Paramêtres des Lignes Géométriques avec les diſtances de leur Origine à leur Points d'Infléxion, ou de Rebrouſſement, ou plus généralement à tous leurs Points Singuliers, ou Multiples, ou encore aux Aſſymptotes de leurs différentes Branches Infinies ; il n'en eſt pas non plus de même du raport des Abſciſſes avec les Soutangentes des Points correſpondans Simples, ou Multiples, Ordinaires, ou Singuliers, ni enfin de celui que les Paramêtres de la Courbe, & le Sinus de l'Angle de ſes Coordonnées ont aux Sinus des Angles que les dernieres directions des Branches Infinies peuvent former avec ces Coordonnées. Au contraire dans tous les raports de ce genre l'un des Termes doit néceſſairement être exprimable Algébriquement par l'autre, & la dé-

termination de ces raports est par conséquent un des objets les plus naturels de l'Analyse de Descartes. Penser autrement ce seroit ne point connoître toute l'étenduë de la Méthode des Indéterminées, découverte la plus importante qu'ait fait en Géométrie ce Philosophe profond, l'Ornement & de notre nation, & de son siécle, qui osa le premier ouvrir au commun des hommes le chemin de la verité presqu'inconnu, & peu frayé jusqu'alors, à qui par-là toutes les Sciences ont eu à la fois obligation, dont toutes les pensées ont été fécondes, dont les fautes mêmes ont été celles d'un grand homme.

Les idées que je viens de développer s'étoient déja présentées à moi il y a quelques années, & ce fut à peu près dans ce tems que je commençai la lecture de l'*Enumeration des Lignes du troisiéme Ordre par M. Newton*. Ce Géométre, dont tous les Ouvrages portent un caractere singulier de sublimité, paroît en particulier dans celui-ci s'être élevé à une hauteur immense, à laquelle tout autre génie moins pénétrant, & moins fort que

le sien auroit tenté vainement d'atteindre : mais la route qu'il a tenuë dans une entreprise si difficile se dérobe aux yeux de ceux qui apperçoivent avec étonnement le degré d'élévation auquel il est parvenu. On doit cependant en excepter quelques legeres traces qu'il a eu soin de laisser sur son passage aux endroits qui avoient mérité qu'il s'y arrêtât plus long-tems. Ces endroits au reste sont presque toujours assez distans les uns des autres. Si l'on se propose donc de suivre la même carriere, on est obligé de se guider soi-même dans de longs intervales; &, lorsqu'on essaye de le faire, on trouve bientôt qu'il n'est guére possible d'y réussir qu'à l'aide de l'Analyse de Descartes, portée même à un degré de perfection que le seul M. Newton paroît avoir connu.

Je fus convaincu de cette verité par ma propre expérience. Le dessein que j'avois conçu de suppléer, s'il m'étoit possible, les preuves qui manquent dans le Traité de M. Newton m'engagea insensiblement à examiner de plus près qu'on n'avoit fait encore la nature, & les proprietés des

Equations Algébriques ; je me servis des Indéterminées pour transformer ces Equations de differentes manieres nouvelles ; je tirai enfin de la consideration de semblables Transformées des conséquences ausquelles le plus souvent il étoit difficile de prévoirque cette consideration pourroit s'étendre.

Mais si ce ne fut qu'à ce prix que je pus parvenir aux Démonstrations que je cherchois principalement, d'un autre côté l'utilité de mon travail ne se borna pas au seul avantage de les avoir trouvées. En effet les premieres vûës que ce travail m'avoit fournies, m'ont fait aussi découvrir depuis un grand nombre d'usages inconnus jusqu'à présent, ausquels l'Analyse de Descartes peut être employée avec plus de succès que le Calcul Differentiel. L'Ouvrage que je mets au jour a surtout pour objet d'expliquer & de démontrer tous ces nouveaux usages, & à cet égard il peut être regardé comme l'extension des pensées de deux grands hommes qui, si l'on hésite encore à accorder à l'un d'eux la superiorité sur l'autre, incontestablement au moins ont été

l'un & l'autre les premiers entre tous leurs contemporains.

Cet Ouvrage sera divisé en trois Sections.

La premiere qui aura peu d'étenduë, contiendra une Méthode pour trouver les Centres généraux des Lignes Géométriques de tous les Ordres. Cette Méthode est, autant que je peux le sçavoir, la seule qui ait été donnée jusqu'ici pour une Effection semblable. Cependant, si je l'ai mise à la tête de mon Livre, ce n'est point par rapport à sa nouveauté, & ce n'est pas non plus que l'invention des Centres soit nécessaire pour la Solution des Problêmes qu'on trouvera dans les Sections suivantes. La seule raison qui m'a porté à commencer par cette Méthode c'est que la démonstration que j'en donne employe à la fois la plus grande partie ou des Principes ou des Transformations dont je fais usage dans tout le reste de l'Ouvrage, & que par là elle est très-propre à faire appercevoir comme d'un coup d'œil la suite d'Axiomes, ou de Pratiques faciles qui doit servir comme de Baze à toutes les verités que je me propose de démontrer.

Dans la seconde Section j'expose mes Principes dans un plus grand jour, & je décris plus au long les differentes Transformations que j'ai imaginées pour parvenir à faire connoître les Affections principales des Lignes Géométriques. Je découvre ensuite une Analogie singuliere entre le résultat de la plûpart de mes Transformations, & celui des Differentiations ordinaires, & cette Analogie me sert à abreger, & à faciliter beaucoup la Pratique de mes propres Régles.

Avec ces secours j'enseigne à déterminer tout ce qui concerne les Branches Infinies qui peuvent se rencontrer dans les Lignes Géométriques, soit que la derniere direction de ces Branches doive être la même que celle des Ordonnées, soit qu'elle doive être differente, soit qu'en ce cas, & supposant de plus les Branches Hyperboliques, l'Assymptote de ces Branches doive passer par l'Origine, soit qu'elle doive en être plus ou moins éloignée. J'enseigne de même à déterminer à tous égards tous les Points Simples, ou Multiples, Ordinaires, ou Singuliers qui peuvent se rencon-

trer dans les Lignes Géometriques; ſoit que ces Points doivent, comme je le ſuppoſe d'abord, être placés dans l'Origine même, ſoit qu'ils deviennent autant de Sommets de la Courbe, ſoit qu'ils puiſſent être ſitués dans cette Courbe en tel endroit qu'on voudra l'imaginer. Enfin je fais une Enumeration exacte & des differentes Eſpeces de Branches Infinies, & des differentes Eſpeces de Points dont les Lignes Géometriques ſont ſuſceptibles juſques dans les cinq premiers Ordres.

Les Reflexions ſur leſquelles mes Regles ſont fondées m'ont conduit à quelques Remarques que j'ai placées en differens endroits de cette Section.

Je prouve, par exemple, à la ſuite du Lemme premier, que deux Branches Infinies Conjuguées l'une à l'autre Hyperboliques, ou Paraboliques ne peuvent ſe diſpoſer l'une par raport à l'autre que de trois façons differentes. Je fais voir de même à la ſuite du Lemme ſecond que deux parties d'une Branche deCourbe ne peuvent s'unir l'une à l'autre que par desPoints de trois figures differentes, & la démonſtration que

je donne de cette verité me sert aussi à démontrer l'impossibilité du Point qu'on nomme communément Rebroussement de la seconde Espece; Point qu'on avoit toujours cru possible depuis que M. le Marquis de l'Hopital en avoit suposé l'existence, & donné la description.

Plus loin j'établis des Analogies singulieres entre les moyens que fournit la consideration des Equations des Courbes pour connoître d'un côté les differens Points de ces Courbes, & d'un autre côté leurs differens *Systêmes* de Branches Infinies à directions paralleles les unes aux autres. Je trouve la source de ces Analogies dans la Theorie des Ombres, ou Projections des Courbes, & j'en prends occasion de traiter cette derniere matiere beaucoup plus generalement qu'on ne l'avoit fait encore.

En d'autres endroits je démontre par mes Méthodes differentes Proprietés ou des Courbes en général, ou des Lignes du troisiéme Ordre en particulier: Proprietés dont la Découverte est duë à M. Newton, & qui depuis qu'on les connoissoit, ou n'avoient point été démontrées, ou ne l'avoient

été que par des moyens moins directs & moins simples que ceux dont je me sers. J'en ajoûte même une nouvelle qui regarde la situation respective des Points d'Infléxion, & des *Branches Infinies à Diamétres* dans les Lignes du troisiéme Ordre, & qui m'a paru mériter de n'être point passée sous silence.

Enfin dans une de mes dernieres Remarques je fais un Parallele des Méthodes que j'ai données précédemment pour trouver tous les Points Singuliers, ou Multiples des Courbes avec celles que le Calcul Differentiel fournit pour trouver les Points d'Infléxion, & de Rebroussement. Entrant à ce sujet dans les principes mêmes du Calcul Differentiel j'indique des moyens pour donner aux Régles qu'on peut tirer de ce Calcul plus d'étenduë qu'on ne leur en a donné jusqu'ici; & malgré cela il resulte toujours de ma comparaison que c'est du côté de mes Méthodes que se trouve l'avantage d'une plus grande simplicité, & d'une plus grande fécondité dans les principes, & en même tems d'une plus grande facilité dans l'exécution.

L'importance dont il étoit de faire

ſentir le mieux que je pourrois un pareil avantage m'a mis dans la néceſſité de remarquer differentes erreurs, dans leſquelles ſont tombés de grands Géometres ou pour avoir voulu juger de la nature des Points Singuliers, ou Multiples par les principes du Calcul Differentiel peu faciles à manier, ou faute d'avoir porté l'Analyſe ordinaire au degré de perfection qui auroit été néceſſairepour pouvoir s'en ſervir heureuſement dans la Solution des Problêmes qu'ils s'étoient propoſés. Si l'on me fait connoître que j'aye eu tort de regarder comme des fautes ce que j'ai repris dans les Ouvrages de ces Auteurs, je ſaiſirai en ce cas avec ardeur la premiere occaſion d'en convenir publiquement : ſi au contraire j'ai été fondé à combattre leurs ſentimens, j'eſpere auſſi qu'ils ne deſaprouveront pas qu'après avoir rendu à leurs talens, & à leurs lumieres toute la juſtice que je devois, je me ſois ſervi de leur exemple pour éclairer ceux qui, marchant après eux dans les mêmes routes, pourroient y rencontrer les mêmes écueils.

Quelques Lecteurs ſouhaiteroient

peut-être qu'à la fuite de chacune des Régles, ou des Méthodes qui se trouvent répanduës dans cette Section j'eusse joint un, ou plusieurs Exemples propres à en éclaircir davantage l'énoncé, & à en rendre en même tems la pratique plus facile: mais le nombre de ces Regles est si considerable, que pout en user de la sorte j'aurois été obligé de grossir beaucoup mon Livre, ce qui pouvoit épuiser enfin l'attention du Lecteur, & même lui causer de l'ennui. Par cette raison je me suis contenté dans cette Section de donner à mes Régles des énoncés très-clairs, & de faire ensorte d'un autre côté qu'elles se prétassent mutuellement du jour par une Analogie soutenuë autant que la matiere le comporteroit, me reservant à placer plus loin quelques Problêmes, ou Exemples Generaux, dans chacun desquels je trouverois occasion de faire à la fois l'application de plusieurs de mes Regles.

Ce sont ces Problêmes qui composent ma troisiéme Section. Comme cependant il auroit été difficile qu'on eût goûté plusieurs Exemples raportés

ſans interruption à la ſuite les uns des autres, j'ai eu ſoin d'y mêler differentes Remarques que j'ai toujours choiſies entre celles qui m'ont paru ou naître le plus naturellement du ſujet, ou être les plus intereſſantes.

Cette raiſon a auſſi contribué à me faire differer juſqu'à cette Section de donner quelques Méthodes, qui avoient d'ailleurs peu de raport avec les précédentes, & qui étoient de nature à demander plus particulierement de n'être point ſéparées des Exemples auſquels je devois les appliquer.

Enfin c'eſt encore dans la même vûë que j'ai placé immédiatement avant le dernier Problême une Propoſition que j'y démontre d'une maniere nouvelle, & qui, ayant pour objet de faire connoître comment les Branches des Courbes peuvent ſe terminer, auroit trouvé auſſi naturellement ſa place vers le commencement de la ſeconde, ou de la troiſiéme Section.

L'expoſition que je viens de faire de cet Ouvrage ſuffit ce me ſemble pour ſe convaincre que, ſi j'ai réuſſi dans le deſſein que je m'y ſuis propoſé, l'uſage du Calcul Differentiel de

AVIS AU RELIEUR.

Le Relieur sera attention à quelques Cartons dont le premier qui est pour les Pages 15 & 16 tient à un autre feüillet qu'il faut placer entre la Préface & le Livre, & où se trouve l'Errata.

A côté de chacun des autres Cartons on a eu soin de joindre un feüillet blanc afin qu'on pût relier sans les coler.

Le Relieur sera de même attention à quatre Planches qui suivent l'ordre des chifres des Figures qu'elles contiennent. Elles doivent être mises à la fin du Livre, & pouvoir en sortir. Elles ne sont ensemble qu'un seul cahier, la premiere tenant à la quatriéme, & la seconde à la troisiéme.

Fautes d'impression qu'il est nécessaire de corriger avec soin.

Page.	Ligne.	Faute...	Correction.
36.	4.	ces	ses.
41.	13.	iy^2	$\overline{ix+e.}\ y^2$
43.	11.	au plus haut Exposant	aux plus hauts Exposans.
65.	8.	(*Fig.* 7.)	(*Fig.* 4.)
69.	6.	; & passons	Passons
72.	13.	exacte, & complette	& exacte
119.	12.	bf	bf^2
121.	18.	$\overline{s+1}$ iéme du $\overline{s+1}$ iéme	$\overline{s+2}$ iéme du $\overline{s+2}$ iéme
127.	1.	ces	ses
168.	7.	du Sommet	de la Racine.
176.	14.	Hyperboliques	Hyperboliques dont l'Assymptote passeroit par l'Origine.
182.	5 & 6.	le premier	ce
186.	2.	que cela s'est trouvé	qu'on a trouvé que cela pouvoit.
222.	13.	elles	à elles
267.	19 & 20.	toutes les	plusieurs des
268.	10.	*a*	*avec*
272.	18 & 19.	d'Inflexion & de Rebroussement	de la Courbe proposée
273.	7 & 8	démontre	s'attache à prouver
275.	7 & 8.	infinie	finie
315.	7.	$\frac{\overline{a+bb.cc}}{ab}+r.xy+$	$\frac{\overline{\overline{a+b.cc}}}{ab}+r.xy-$

352.	15.	$\frac{1}{2}$ . . .	2
368.	21.	y . . .	y
370.	22.	y . . .	y
380.	10.	Termes . . .	membres
384.	3.	x . . .	y
398.	8.	troiſiéme . . .	ſeconde
ibid.	14.	70 . . .	71
409.	3.	$\pm e\sqrt{-d})$ . . .	$(\pm e\sqrt{e-d})$
ibid.	13.	48 . . .	73
ibid.	18.	49 . . .	74
410.	16.	48, 49 . . .	73, 74
431.	13.	162 . . .	161

On ne doit pas manquer de lire une Addition pour les Pages 7, 8, & 236 qu'on trouvera à la fin du Livre.

Comme il ſeroit trop long de joindre ici une Table des Matieres, nous nous contenterons d'indiquer que la ſuite des Titres ſe trouve aux Pages 1, 2, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 21, 24, 29, 31, 47, 54, 69, 88, 91, 93, 116, 148, 160, 194, 226, 231, 236, 238, 249, 256, 257, 258, 259, 262, 263, 264, 266, 268, 307, 324, 336, 338, 340, 342, 348, 365, 368, 394, 396, 411, 421, 422, 426, 452.



USAGES
DE L'ANALYSE
DE DESCARTES... &c.

SECTION PREMIERE.

METHODE

Pour trouver les Centres généraux des Lignes Géométriques de tous les Ordres.

DEFINITION

Des Centres généraux.

On nommera dans cet Ouvrage Centre général d'une Courbe un Point de son Plan, comme *A* (*Fig.* 1, 2, & 3), dans

lequel toutes les Droites qui pourront y passer seront coupées de maniere que leurs parties comprises entre ce point, & les differentes Branches de Courbes qu'elles rencontreront d'un côté soient égales aux parties comprises entre ce même point, & les differentes Branches qu'elles rencontreront de l'autre, chacune à chacune : d'où il suit que, si l'on suppose un œil placé dans le Centre général d'une Courbe quelconque, les parties diamétralement opposées de cette Courbe lui présenteront en tout sens une symétrie parfaite.

PROBLÊME.

Déterminer en premier lieu si une Ligne proposée par son Equation a un Centre général, en second lieu dans quelles conditions elles pourroit en acquerir un, & enfin dans quel point du Plan sur le-

quel elle eſt décrite un tel Centre peut être placé.

ANALYSE DU PROBLEME.

Comme l'Origine des Coordonnées d'une Courbe eſt de tous les points de ſon Plan celui ſur lequel ſon Equation peut donner plus de connoiſſances, nous allons d'abord, en ajoûtant reſpectivement à l'Abſciſſe & à l'Ordonnée les deux Indéterminées *p*, & *q*, tranſporter l'Origine en un point quelconque. Nous ſupposerons enſuite que celui où il aura été tranſporté ſoit en effet un Centre général, ce qui conduira & à la détermination de *p*, & de *q* convenables pour cela, & à la connoiſſance des conditions d'où dépend l'exiſtence d'un tel Centre.

Or ſuppoſer que l'Origine ſoit un Centre général c'eſt, ſelon la Définition précédente, ſuppoſer

aussi que, quelle que puisse être la direction des Ordonnées, leurs differentes valeurs positives, lorsqu'elles répondront à une Abscisse nulle, seront égales à leurs differentes valeurs négatives, chacune à chacune.

De plus, pour transformer une Equation de Courbe, dont les Coordonnées sont x, & y, de façon que la situation de son Ordonnée devienne quelconque, il suffit (m, & n étant deux nombres indéterminés, n pouvant en particûlier être positif, ou négatif, & z, & u devant exprimer les Coordonnées nouvelles) de substituer respectivement à la place de x, & de y les deux valeurs $z + nu$, & mu; car soit A (*Fig.* 4. 5.) un point quelconque de la Courbe, O l'Origine, $OC = x$, $AC = y$, AB une nouvelle Ordonnée au même point A, mais dans une direction quel-

conque, & puiſque les Angles *BAC*, *ABC* ſont auſſi quelconques, le rapport des deux Côtés *AC*, *BC* du Triangle *ABC* à ſon troiſiéme *AB* pourra être exprimé par celui que les deux nombres indéterminés m, & n ont à l'unité: en ſorte que ſi l'on nomme *AB*, u, *AC*, ou y ſoit $= mu$, & $BC = nu$, & ſi on fait encore $OB = z$, *OC*, ou x devienne $= z + nu$. Donc réciproquement ſi y, & x ſont ſuppoſés égales à mu, & à $z + nu$, on en peut conclure que la nouvelle Ordonnée eſt generalement conſiderée dans toutes les ſituations poſſibles.

Des remarques précédentes il ſuit que, pour réſoudre le Problême, il faut ne ſe point contenter d'augmenter des quantités p, & q les deux Coordonnées, mais ſubſtituer $p + z + nu$ à

la place de x, & $q + mu$ à la place de y, faire ensuite dans la Transformée $z = o$, & enfin supposer que dans cet état ses Racines positives deviennent égales à ses Racines négatives, chacune à chacune, ou ce qui est la même chose supposer égaux à zero tous les Coefficiens de ses Termes pairs, & de ces Egalités supposées (m, & n restant toujours quelconques) devront resulter & les déterminations de p, & de q propres à porter au Centre, & les conditions de son existence.

Mais ces opérations peuvent être abregées 1°. parce qu'au lieu de faire $z = o$ dans la Transformée qui proviendroit de la substitution de $p + z + nu$ à la place de x, & de $q + mu$ à la place de y, il suffit de prendre tout d'un coup, & plus simplement la Transformée provenan-

te de la substitution de $p + nu$ au lieu de x, & de $q + mu$ à la place de y.

2°. On connoîtra encore avec plus de facilité les differens Termes de cette derniere Transformée qu'on auroit en substituant $p + nu$, & $q + mu$, au lieu de x, & de y dans la Proposée, si l'on suppose avoir substitué d'abord $x + dx$, & $y + dy$ en la place de x, & de y, & qu'ensuite dans les différens resultats de cette substitution on suppose encore que x, y, dx, & dy représentent respectivement p, q, nu, mu.

En effet si l'on bannit des differentes Differentielles de la Proposée toutes les Differences d'un genre supérieur au premier, & qu'on les divise la seconde par 2, la troisiéme par 2, & par 3, la quatriéme par 2, par 3, & par 4... &c., ces differentes Differentielles ainsi préparées doi-

vent, comme l'ont démontré Mrs Saurin, & Bernoulli *, donner exactement, mais dans un ordre renversé les membres differens de la Transformée qui proviendroit d'avoir substitué $x+dx$, & $y+dy$ au lieu de x, & de y dans la Proposée. Les résultats d'une pareille substitution sont donc faciles à connoître au moyen des Differentiations, & par conséquent combinant tous les principes que nous avons établis jusqu'ici on pourra généralement en déduire la Régle suivante.

REGLE OU METHODE

Qui contient la Solution générale du Problême.

Pour résoudre le Problême on prendra d'abord par ordre, & à

* Voy. Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris an. 1716 Pag. 377, & an. 1711 Pag. 55. Edition de Paris.

l'exception de la derniere seulement toutes les Differentielles qu'on pourra tirer de la Proposée, en observant d'en bannir toutes les Differences d'un genre supérieur au premier (& avec cette restriction on ne pourroit parvenir qu'à la Differentiation dont l'Exposant seroit égal à celui du Degré de l'Equation).

En second lieu dans toutes les Differentielles d'un Degré impair, si l'Equation proposée est d'un Degré pair, ou dans toutes celles d'un degré pair, si cette Equation est d'un Degré impair, auquel cas on n'oublieroit pas l'Equation elle-même, qui seroit regardée comme la Differentielle du Degré zero, dans toutes ces Differentielles on fera séparément chaque Terme $= o$ après les avoir ordonnées par rapport à l'une des Differences dy, ou dx, & il en resultera les valeurs de x,

& de y propres à porter au Centre general, ainsi que les conditions sur les Coefficiens de la Proposée ausquelles sera attachée l'existence d'un Point pareil.

EXEMPLE PREMIER.

Soit proposée l'Equation du Cercle ($yy = 2ax - xx$) : comme elle est d'un Degré pair, & duquel on ne peut tirer à notre maniere qu'une seule Differentielle impaire, sçavoir la premiere qui est ($2ydy - \overline{2a + 2x}. dx = 0$), je fais séparément $= 0$ chacun des Termes de cette premiere Differentielle, & cela donne ($y = 0$), ($x = a$), & point de condition ; d'où on peut conclure que le Lieu de l'Equation proposée a nécessairement un Centre général, que ce Centre

y eſt placé ſur l'Axe même, & à la diſtance *a* de l'Origine.

EXEMPLE SECOND.

Soit propoſée l'Equation generale à toutes les Sections Coniques, dans laquelle nous donnerons même au premier Terme un Coefficient, afin qu'elle puiſſe être cenſée délivrée de toutes Fractions, & que d'ailleurs les deux Coordonnées s'y trouvent dans un même Degré de complication ; elle s'exprimera donc en cette ſorte :

$$\left\{\begin{array}{l} nyy + rxy + mxx = o \\ \quad + ay + bx \\ \qquad + cc \end{array}\right\}$$

Or on n'en peut non plus tirer à notre maniere qu'une ſeule Differentielle impaire, qui eſt la premiere, ou bien $(\overline{2ny + rx + a},$

$dy + \overline{2mx + ry + b}. dx = o$) ; & en faisant $= o$ chacun de ses Coefficiens en particulier il en resulte ($2ny + rx + a = o$), & ($2mx + ry + b = o$), lesquelles donnent par leur réduction,

$$1^{o}\ldots \frac{2ny + a}{r} = \frac{ry + b}{2m}$$

$$2^{do}\ldots y = \frac{rb - 2ma}{4mn - rr}$$

$$3^{o}\ldots x = \frac{ra - 2nb}{4mn - rr}$$

D'où il suit que les Sections Coniques, à l'exception de la seule Parabole, ont un Centre général, sur lequel on tombera, si l'on donne à x, & à y les valeurs qu'on vient d'assigner, & ces valeurs ne peuvent être difficiles à construire, puisque m, n, r, sont des nombres entiers, & a, b des lignes droites données.

Nous avons dit à l'exception de la ſeule Parabole, parceque dans l'Equation particuliere de cette Courbe $4mn$ devient $= rr$, & ainſi ſon Centre doit ſe trouver placé à une diſtance infinie de l'Origine, le Dénominateur $4mn - rr$ des Fractions qui expriment ſa diſtance devenant $= o$.

On peut encore conclure de-là que, lorſque les Equations de deux, ou pluſieurs Sections Coniques ne different que par le Terme Conſtant, ces Sections ſont néceſſairement Concentriques.

EXEMPLE TROISIE'ME.

Soit propoſée l'Equation que donne M. Newton pour le premier cas général des Lignes du troiſiéme Ordre, ſçavoir ($xyy + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$). Sa premiere Differentielle eſt ($\overline{2xy + e}$.

$dy = \overline{-yy + 3ax^2 + 2bx + c}.\ dx$ & la seconde, après en avoir banni les secondes Differences, est pareillement ($2x\,dy^2 + 4y\,dx\,dy = \overline{6ax + 2b}.\ dx^2$) La troisiéme enfin ne nous est point nécessaire, parce qu'elle seroit la derniere qu'on pourroit tirer. Or les Equations qu'on peut déduire des Differentielles des Degrés qui ont pour Exposant 2, & o sont :

1°. . . ($2x = 0$), ou bien ($x = 0$)
2°. . . ($4y = 0$), ou bien ($y = 0$)
3°. . . . . . . ($6ax + 2b = 0$).
4°. ($xyy + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$); & en substituant dans les deux dernieres les valeurs de x, & de y prises dans les premieres, c'est-à-dire, zero en la place de x, & de y, ces dernieres se changeront en ($2b = 0$), ou bien ($b = 0$), & ($d = 0$).

D'où on peut conclure 1°. que, lorsque les Courbes désignées par l'Equation proposée auront un Centre Général, ce Centre devra être placé dans l'Origine même, & en second lieu que ces Courbes ne peuvent avoir de Centre qu'au cas, ou sous la condition que les Coefficiens b, & d manquent dans leur Equation, & c'est là en effet le cas où M. Newton dit qu'elles doivent en avoir (*voy. Enum. Lin. 3^i Ord. Esp.* 27, 38, 59, 63.).

EXEMPLE QUATRIE'ME.

Soit proposée la Cassinoide dont l'Equation, son Origine étant prise dans le milieu de la Ligne qui joint les Foyers, est $(y^4 + 2x^2 + 2b^2 . y^2 + x^4 - 2b^2 x^2 + 2a^2 b^2 - a^4 = 0)$. Sa premiere, & sa troisiéme Differentiel-

le ſont $(4 . \overline{y^2 + b^2 + x^2} . y dy = -4 . \overline{y^2 - b^2 + x^2} . x dx)$, & $(24 y dy^3 + 24 x dx \, dy^2 + 24 y dx^2 dy + 24 x dx^3 = 0)$. Or les Equations qu'on peut faire de la 3me Differentielle ſe réduiſant à $(x = 0)$, & $(y = 0)$, & ces valeurs de x & de y ſatisfaiſant encore aux deux Equations qu'on pourroit tirer de la premiere Differentielle, il s'enſuit 1°. que l'exiſtence du Centre n'eſt dans cet Exemple attachée à aucune condition, ou que la Courbe en a néceſſairement un, & 2do qu'il eſt placé dans l'Origine.

REMARQUE PREMIERE

Où l'on expoſe les raiſons qui ont empêché qu'on ne ſe ſervît dans la Solution du Problême précédent de la Définition que M. Newton avoit déja donnée des Centres Généraux.

Quoiqu'il n'ait point encore

paru

paru de Méthode pour la détermination des Centres généraux des Courbes, & que par conséquent la matiere que nous traitons soit absolument nouvelle, on aura cependant pû voir avec surprise & que nous nous soyons écartés de la Définition que le célébre M. Newton avoit déja donnée des Centres au commencement de son excellent Traité des Lignes du troisiéme Ordre, & que néanmoins nous soyons parvenus dans notre penultiéme Exemple à assigner pour cet Ordre de Lignes les mêmes conditions que lui.

Les raisons qui nous ont portés à donner des Centres généraux une Définition differente de celle de ce grand Géométre, le premier, & peut-être le seul qui jusqu'à présent eût parlé de ces Points, ont été,

1°. Que l'acception naturelle & ordinaire du mot *Centre* sup-

pose certainement cette ſymétrie parfaite que nous avons dit que l'œil devroit appercevoir, s'il étoit tranſporté dans un Point pareil.

2°. Que la Définition de M. Newton eſt compriſe dans la nôtre ; en effet, puiſqu'il a nommé Centre général le concours des Diamétres dont les Ordonnées rencontrent la Courbe dans le nombre de points marqué par le Degré de ſon Equation, il ſera facile, en ſe rapellant nos principes, d'appercevoir que pour déterminer les Centres dont il a parlé, auſſi bien que les conditions de leur exiſtence il ſuffiroit de faire = o tous les membres de la ſeule pénultiéme Différentielle.

3°. Enfin que ce n'eſt qu'en ſe ſervant de notre Définition qu'on peut parvenir aux conditions que M. Newton a aſſignées ;

car si dans l'Equation du troisiéme Exemple on faisoit seulement = o les trois membres de la seconde Differentielle, qui est en ce cas la pénultiéme, on ne trouveroit que la premiere condition ($b = o$), & non la seconde ($d = o$); d'où il paroît suivre que c'est notre Définition, & non la sienne propre, que ce Géométre a eu en vûë lorsqu'il a déterminé les Centres des Lignes du troisiéme Ordre. Une nouvelle preuve de cette verité, c'est que dans les Especes 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, & même (si l'on a égard aux Racines imaginaires) dans l'Espece 32, & dans plusieurs autres l'Origine est certainement un concours général de Diamétres, puisque toutes les Droites qui y passent y sont coupées de maniere que la somme des deux parties réelles, ou imaginaires comprises

d'un côté est toujours égale à la partie réelle comprise de l'autre, & cependant M. Newton n'a point prétendu que dans ces Courbes l'Origine fût un Centre général.

L'on ne doit point penser non plus que M. Newton, ait entendu par le mot de Centre le concours & des Diamétres dont les Ordonnées rencontreroient la Courbe en trois points, & de ceux dont les Appliquées ne la pourroient rencontrer qu'en deux points seulement; car il est encore facile de se convaincre par nos principes que la nouvelle condition de ce concours doit se trouver en substituant dans l'antepenultiéme Differentielle la valeur de d*x* en d*y*, ou de d*y* en d*x* prise de la dernire égalée en entier à zero. Or dans le cas de l'Exemple troisiéme une pareille substitution donneroit pour qua-

triéme Equation ($c = e$), & non ($d = o$); en effet dans la 38me Especе, où un tel concours a lieu on a à la fois ($b = o$), ($c = o$), & ($e = o$), & par conséquent *à fortiori* ($b = o$), & ($c = e$).

Et on peut conclure de là de quelle maniere il faudroit s'y prendre pour trouver dans des Ordres de Lignes superieurs au troisiéme les concours de Diamétres dont les Ordonnées rencontreroient la Courbe en tel nombre de points qu'on voudroit assigner.

REMARQUE SECONDE

Où l'on annonce les principaux usages ausquels peuvent s'employer les principes qui ont été établis ci-dessus.

L'utilité des observations par lesquelles nous sommes parvenus à resoudre le Problême précé-

dent, ne ſe borne pas à la ſeule détermination des Centres généraux des Courbes. Comme nous avons développé en quelque maniere dans ces obſervations les rapports les plus ſecrets de l'Analyſe ordinaire, & du Calcul Differentiel, on doit voir au contraire que preſque tout ce qu'on eſt juſqu'ici venu à bout de connoître par le moyen de ce Calcul pourra deſormais ſe découvrir d'une maniere au moins auſſi courte, & (on oſe l'avancer) plus ſimple, & plus naturelle par le ſecours de la ſeule Analyſe. Les Regles ingenieuſes qu'ont données deux illuſtres Membres de l'Académie Royale des Sciences de Paris, Meſſieurs Bernoulli, & Saurin, pour déterminer les Tangentes des Points Multiples, & ſelon leſquelles il eſt néceſſaire pour cela de faire ſucceſſivement pluſieurs Differentiations, ſe dé-

duiront en particulier très-facilement des principes que nous avons posés, & on pourra generalement les employer ces principes à découvrir le lieu, & les directions de tous les Points Singuliers, ou Remarquables des Courbes, aussi bien que de leurs differentes Branches Infinies; il faudra pour cela déterminer d'abord quels Symptômes il doit, pour ainsi dire, paroître dans les Equations de ces Lignes, lorsque de tels Points, ou de telles Branches y sont considerés de la maniere la plus simple; on supposera ensuite que ces Symptômes ayent lieu en effet dans les Transformées générales qu'on tirera facilement de la Proposée au moyen des Differentiations, & de ces différentes suppositions résulteront autant d'Equations qui détermineront le Point, ou la Bran-

che qu'on cherchera, & les conditions de leur existence. Or cette Méthode générale pouvant se subdiviser en un nombre infini des Regles, nous nous contenterons d'en raporter quelques-unes que nous choisirons entre celles qui sont ou les plus simples, ou les plus importantes, & nous en ferons incontinent après l'application à quelques Exemples.

SECTION SECONDE.

DIFFERENTES APPLICATIONS

Des principes sur lesquels est fondée la Méthode précédente.

DEMANDES.

Ayant tiré d'un point quelconque *A* (*Fig.* 6.) deux Droites *ABEH*, *ACGL*, dont les directions soient de part & d'autre moyennes entre l'Horizontale, & la

la Verticale, qu'on prenne ſur l'une & ſur l'autre de ces lignes un nombre quelconque *r* de parties égales & conſecutives *AB*, *BE*, *EH* ... &c, *AC*, *CG*, *GL*... &c : que de plus par les diviſions de chacune de celles qui ſeront de même nom, ou qui auront un même Expoſant, on mêne les Droites horizontales & ponctuées *BC*, *EFG*, *HIKL*, &c, & qu'on tire ſemblablement par chaque point de diviſion de *AH*, ou de *AL* des Droites comme *BFK*, *EI*, &c, ou *CFI*, *GK*, &c paralleles à *AL* ou à *AH*, & cela partagera l'eſpace compris dans l'Angle *AHL* (que nous appellerons *Triangle Algebrique*) en pluſieurs petits Quarrés, dont l'une des Diagonales ſera néceſſairement partie de quelqu'une des Horizontales ponctuées *BC*, *EFG* ou *HIKL*, mais avec cette difference que la premiere Horizon-

tale ou la plus basse de toutes ne contiendra que la Diagonale d'un Quarré seulement, au lieu que la seconde contiendra les Diagonales de deux Quarrés, la troisiéme de trois, &c. Enfin qu'on place dans le Quarré que traversera la premiere Horizontale *BC* un Terme tout connu a: qu'on place de même dans le premier Quarré vers la gauche de ceux que traversera la seconde Horizontale *EFG* le Produit de y Linéaire par un Coefficient constant b, & dans le second celui de x Linéaire par un autre Coefficient c: qu'on mette de la même maniere dans le premier Quarré vers la gauche que traversera la troisiéme Horizontale *HIKL* le Produit de y^2 par un Coefficient constant e, dans le second celui de xy (ou x à une Dimension de plus, & y une de moins qu'auparavant) par

f, & dans le troisiéme celui de xx (où x a encore augmenté & y baissé d'une dimension) par g ... &c.

Tout cela posé, je demande qu'on accorde 1°. que par de semblables Opérations je peux faire entrer dans les différens Quarrés que traversera une Horizontale quelconque tous les Produits des Puissances de x & de y, où la Somme des Exposans de ces deux inconnuës, sera égale au nombre qui marquera le degré de l'Horizontale proposée diminué de l'unité; 2°. que dans les Quarrés que traverseront les $r+1$ premieres Horizontales, on peut par conséquent faire entrer aussi tous les différens Produits des Puissances de x & de y où la Somme des Exposans de ces deux Coordonnées ne montera pas plus haut que le nombre r, & qu'ainsi on peut toujours placer dans le

Triangle Algebrique composé de $r+1$ rangs horizontaux l'Equation generale pour le degré r; 3°. que, si l'on prend pour Terme de l'Equation generale d'un Degré quelconque la Somme de ceux de ses membres qui seront compris dans le Triangle Algebrique entre deux Droites voisines, paralleles l'une & l'autre ou à *AL* ou à *AH*, ou bien toutes deux horizontales, cette Equation paroîtra dans ces trois cas différens ordonnée, ou par rapport à y seulement, ou par rapport à x seulement, ou bien enfin par rapport à y & x à la fois; en sorte que dans ce dernier cas le premier Terme comprendra tous les membres ou la Somme des Exposans de x & de y sera égale à r; c'est-à-dire, au nombre qui marquera le Degré de l'Equation, le second tous les membres où une semblable Som-

me ſera $= r - 1$ ... &c.

REMARQUE PREMIERE.

Nous venons de mettre au nombre de nos Demandes la formation de l'Equation generale pour un Dégré quelconque, parce qu'il nous a paru inutile de la démontrer plus au long. Nous n'ignorons cependant point que M. l'Abbé de Bragélongne *, Académicien célébre de l'Académie Royale des Sciences de Paris, a jugé à propos d'en uſer autrement dans un Ouvrage où il a traité un ſujet à peu près ſemblable à celui-ci, & que par cette raiſon nous aurons dans peu occaſion de citer pluſieurs fois.

REMARQUE SECONDE.

Outre le premier avantage du Triangle Algebrique, qui

* Voyez les Memoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, ann. 1730. & 1731.

consiste en ce qu'il présente les Equations des Courbes Ordonnées à la fois des trois manieres qu'on vient de décrire, si l'on fait de plus attention que ce Triangle ne differe que de position du Parallelogramme dont M. Newton s'est servi dans ses Fragmens pour tirer les Racines des Equations en Series Infinies, on trouvera qu'il peut être d'une grande utilité pour faire mieux connoître les Assymptotes Rectilignes & Curvilignes des Courbes, aussi bien que la Courbure de leurs différens Points. On s'en convaincra encore mieux quand on sera versé dans les Opérations que nous allons enseigner dans les derniers des Lemmes suivans, & on en verra même en particulier un exemple plus bas.

LEMME PREMIER

Où l'on donne des moyens pour connoître par la ſeule inſpection d'une Equation, ſi les Ordonnées de la Courbe qui en eſt le Lieu ſont paralleles à la derniere Direction de quelques Branches Infinies; en quel nombre & de quelle eſpece ces Branches peuvent être; &, au cas qu'elles ſoient Hyperboliques, quelle eſt la diſtance de l'Origine à leur Aſſymptote.

Qu'on ſuppoſe d'abord que l'Equation ſoit par exemple du troiſiéme Dégré, qu'elle ait été Ordonnée par rapport à y, & qu'il ne lui manque que ſon premier Terme hy^3, en ſorte que h ſoit $= 0$; la plus haute Puiſſance de y dans cette Equation, où le Terme qui y ſera devenu le premier aura donc un Coefficient ($ix+e$) compoſé de x Linéaires, & de

grandeurs constantes, & qui pourra par conséquent être rendu égal à zero en donnant à x une valeur finie & déterminable, sçavoir $-\frac{c}{i}$; ou ce qui est la même chose, il est pour lors une valeur finie, qui étant donnée à x anéantiroit le Coefficient du premier Terme, & il n'en est qu'une de propre à cet effet.

Mais, s'il manquoit les deux premiers Termes dans la Formule generale, & que par conséquent la plus haute Puissance de y dans l'Equation nouvelle eût pour Coefficient $(kx^2 + fx + b)$ où se trouvent des x élevés au Quarré, alors supposant ce Coefficient $= 0$, on trouveroit par la résolution des Equations déterminées deux valeurs de x réelles ou imaginaires, qui y étant substituées feroient propres à le faire en effet évanoüir.

Et de même s'il manquoit les trois, les quatre, les cinq premiers Termes, &c dans l'Equation generale d'un Degré quelconque, & que le Coefficient du Terme ſuivant qui deviendroit par là le premier, fût composé de toutes les Puiſſances de x qui peuvent en faire partie, on prouveroit qu'il ſeroit 3, 4, 5, &c valeurs de x réelles, ou imaginaires propres à rendre ce Coefficient $=0$.

Or le dernier Terme de toute Equation diviſé par le Coefficient du premier étant égal au produit de toutes les Racines de cette Equation, le Coefficient de l'avant dernier diviſé par celui du premier étant égal à la Somme des Produits qu'on peut faire en multipliant les Racines deux à deux, ſi l'Equation ordonnée par rapport à y eſt du troiſiéme Degré, cinq à cinq, ſi elle eſt du

tion seroit divisible par x moins cette valeur, puisque x moins cette valeur diviseroit les Coefficiens de chacun de ces Termes : elle pourroit donc en ce cas être abaissée d'un Degré, & ramenée à un autre Degré où il ne lui manqueroit aucun Terme, s'il ne lui en manquoit qu'un dans le Degré superieur, & où il lui en manqueroit toujours un de moins qu'auparavant : en effet l'Equation exprimeroit pour lors une Ligne d'un Degré inferieur d'une unité au sien combinée avec une Droite parallele aux y.

Si la valeur de x propre à rendre $=0$ le Coefficient du premier Terme anéantissoit en même tems quelques autres Coefficiens, on pourroit en tirer différens Corollaires, dans le détail desquels nous n'entrerons point, de peur de paroître trop diffus. De ce qu'elle anéantiroit, par

exemple, le dernier Terme, ou de ce que x moins cette valeur seroit un des Diviseurs du dernier Terme, on pourroit conclure que le dernier Terme divisé par le Coefficient du premier donneroit un Quotient fini; & par conséquent quoique l'une des Ordonnées correspondantes à cette valeur de x devint infinie, le Produit de toutes les Ordonnées qui y répondroient seroit néanmoins fini; d'où il suivroit qu'il devroit y avoir en même tems une Ordonnée correspondante infiniment petite, ou que la ligne des x couperoit la Courbe à l'extrémité de la valeur propre à anéantir le Coefficient du premier Terme de son Equation. C'est ce qui arrive en effet à la Courbe representée par l'Equation paticuliere
$(\overline{x+a}.y^2 + e^2y + x^3 + \overline{a+b}.x^2$

$+ \overline{ab + cc} . x + acc = o$) qui eſt dans le cas dont nous parlons, & ainſi des autres.

De la Démonſtration précédente il ſuit que, s'il manque dans une Equation indéterminée un nombre impair des premiers Termes qu'elle pourroit avoir, la Courbe qu'elle repreſente a au moins une Aſſymptote parallele à la direction des y, ce qu'on ne peut conclure de cela ſeul qu'il en manque un nombre pair quelconque; puiſque pour lors l'Equation faite du Coefficient du premier Terme égalé à zero ſeroit d'un Degré pair, & pourroit avoir toutes ſes Racines imaginaires.

Et on doit auſſi appercevoir en conſéquence de ce qui a été dit ci-deſſus la verité des Inverſes de toutes les Propoſitions que nous y avons démontrées: ainſi, lorſque les y ſont priſes

parallèles à une Assymptote, il doit être dès-lors une valeur finie qui, donnée à x, soit propre à rendre infinie l'y correspondante, ou, ce qui est la même chose, à rendre infini, ou bien le dernier Terme divisé par le Coefficient du premier, ou le Coefficient de l'avant dernier divisé par celui du premier, ou.... &c. donc en general cette valeur de x doit être propre à rendre $=0$ le Coefficient du premier Terme dans l'Equation de la Courbe. Or ce Coefficient ne peut être rendu $=0$ par certaines suppositions sur la valeur de x, qu'autant qu'il contiendra des x dans son expression. Donc si les y sont paralleles à une Assymptote dans une Courbe quelconque, la plus haute Puissance de y qui se trouvera dans l'Equation y sera multipliée par des x; donc elle ne sera pas la

plus haute qui pourroit s'y trouver indépendamment d'une supposition pareille ; donc en ce cas le Terme y^3, qui seroit celui où y pourroit monter au Degré le plus élevé, manquera nécessairement dans l'Equation, & on fera un raisonnement semblable sur tous les autres cas.

Enfin quoique nous ayons supposé jusqu'à présent que, les premiers Termes d'une Equation indéterminée manquant, celui qui devenoit le premier par ces manquemens eût un Coefficient complet, ou qu'il se trouvât dans son Coefficient toutes les Puissances de x qui peuvent y être employées, il peut néanmoins arriver aussi que les différens membres de ce Coefficient manquent eux-mêmes en partie, & ces nouveaux manquemens produisent quelquefois dans les Courbes des changemens considerables, mais toujours

toujours faciles à indiquer.

Ainsi lorsqu'il manque à la fois & le premier terme hy^3 & la partie e toute connuë du Coefficient du second, qui devient pour lors le premier, c'est une preuve que l'Origine des x est dans l'Assymptote même, puisque la distance de l'Assymptote prise par les régles précédentes est pour pour lors $= \frac{0}{i}$.

Si, les deux premiers Termes hy^3 & iy^2 manquant, il manque aussi la partie b toute connuë du Coefficient du troisiéme, qui devient pour lors le premier, ou si $b = 0$, c'est une marque que l'Origine des x est dans l'une des deux Assymptotes.

Si dans ce cas la partie fx manque aussi, ou si $f = 0$, c'est une preuve que l'Origine est à la fois dans les deux Assymptotes, & que ces deux Assym-

ptotes paralleles aux y se confondent; & n'en font plus qu'une seule, qui est double.

Et si, le premier Terme hy^3 manquant, il eût encore manqué la partie changeante ix du Coefficient du second, & que son autre partie toute connuë e se fût au contraire trouvée dans l'Equation; alors restituant la partie changeante en lui donnant o pour Facteur (ce qu'il est évident qu'on peut faire sans qu'il en résulte aucun changement dans la Courbe qui est le lieu de la Proposée) on auroit trouvé que $\frac{e}{0}$ étoit la Valeur qu'il auroit fallu donner à x, pour faire entierement disparoître le Coefficient du Terme devenu le premier, & pour rendre même une des valeurs de y infinie d'un Ordre superieur à celui dont x le seroit devenuë par cette sup-

poſition ; en ſorte que la Courbe auroit dû avoir pour lors deux Branches Paraboliques, dont la derniere direction eût été celle des Ordonnées : & il en ſeroit encore de même ſi, le premier & le ſecond Terme manquant à la fois, il manquoit de plus la partie, ou les deux parties du troiſiéme où x ſeroit élevée au plus haut Expoſant.

En effet dans le premier cas les membres kx^2y, lx^3, ne pourroient manquer encore à la fois dans le plus haut Rang horizontal, ſans que ce Rang manquât en entier, ou que l'Equation s'abaiſsât d'un Degré. Or, ſi kx^2y ſe trouve dans l'Equation, la Somme des deux Ordonnées correſpondantes à une Abſciſſe ſimplement infinie, ou, ce qui eſt la même choſe, l'une de ces deux Ordonnées devra être infinie du ſecond Ordre, l'autre

étant ou ſimplement infinie, ou finie, ou infiniment petite du premier ou du ſecond Ordre : ſelon que les parties lx^3, lx^3+gx^2, lx^3+gx^2+ix du dernier Terme ſe trouveront ou manqueront dans ce Terme, ou bien ſelon que le Produit des deux Ordonnées devra être infini du troiſiéme, du ſecond, ou du premier Ordre, ou fini : il y aura donc pour lors dans la Courbe une Branche Infinie qui aura pour Aſſymptote Curviligne une Branche de Parabole Conique. Mais, ſi kx^2y manquoit dans l'Equation, & qu'au contraire lx^3 s'y trouvât, le Produit des deux Ordonnées correſpendantes à une Abſciſſe infinie ſeroit infini du troiſiéme Ordre, quoique leur Somme, ou plûtôt leur Difference (car elles ne pourroient avoir un même ſigne) ne fût que ſimplement infinie, ou finie,

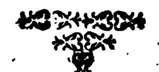
ou nulle, ſelon que les parties *fx*, *fx* + *b* du troiſiéme Terme ſe trouveroient, ou manqueroient dans ce Terme. Les Ordonnées deviendroient donc alors l'une & l'autre infinies de l'Ordre $\frac{3}{2}$, ou les Branches Infinies de la Courbe qui ſeroit le Lieu de la Propoſée auroient pour Aſſymptotes Curvilignes deux Branches d'une ſeconde Parabole Cubique.

Et on fera un raiſonnement à peu près ſemblable ſur le ſecond cas dans lequel ce feront les Branches de la Parabole Conique ; ou de la premiere Parabole Cubique qui devront faire les fonctions d'Aſſymptotes Curvilignes.

Quoiqu'il nous fût facile de nous étendre davantage ſur cette matiere, nous nous abſtiendrons néanmoins de pouſſer ici plus loin une pareille Théorie, parce

que nous devons indiquer plus bas des moyens d'y réussir avec plus de facilité.

Quant à présent nous nous contenterons de faire observer les différentes manieres dont les Branches Infinies des Courbes peuvent être disposées les unes à l'égard des autres. Outre que ce sujet est assez important, qu'il n'a pas encore été traité, & qu'il trouve ici naturellement sa place, on pourra d'ailleurs voir dans la suite avec plaisir l'Analogie qu'il a à quelques Propositions que nous aurons occasions de démontrer plus bas.



REMARQUE

Où l'on prouve que les Branches Infinies ne peuvent se trouver que deux à deux dans les Courbes, & que deux Branches Conjuguées ne peuvent y être scituées l'une par rapport à l'autre, que des trois manieres dont l'Hiperbole Conique & l'Hiperbole Cubique, la Parabole Conique & les deux Paraboles Cubiques fournissent des exemples.

Supposons d'abord que la Branche Infinie que nous considerons soit Hiperbolique, que les y soient paralleles à son Assymptote, que l'Origine soit dans l'Assymptote même, & qu'on prenne x infiniment petite.

Il suivra de là 1°. que la valeur de y en x pourra être exprimée par un seul Terme : car x étant ou infinie ou infiniment petite, tous les Polynomes dont

les Termes feroient ordonnés par rapport à x doivent nécessairement se réduire à un seul Terme, ainsi que toutes leurs Puissances & toutes leurs Racines. Les Sommes qu'on pourroit former de plusieurs de ces Puissances ou Racines, les Puissances ou Racines de ces Sommes, &c doivent donc aussi se réduire à un seul Terme, & en général toute Fonction de x doit s'y réduire pareillement. Or y en est une, puisqu'il y a égalité entre des Termes affectés d'y, de x, & de Constantes. Donc, &c.

En effet, il est facile d'appercevoir que l'Equation doit pour lors se changer en une autre dans les différens Termes de laquelle les Exposans de x & de y seront en Progression Arithemetique, & qu'on pourra aisément connoître par la fameuse Régle du *Parallelogramme* que M. Newton a donnée

née dans ses Fragmens, & qui a été depuis commentée par MM. Taylor, Stirling, & Gravésande's : de plus cette derniere Equation étant divisée par les Changeantes que contiendra son dernier Terme ; doit donner en Termes constans la valeur d'un Produit ou d'une Fraction de Puissances simples de x & de y ; ensorte que (m & n étant des nombres entiers quelconques) elle se réduira à cette forme ($y^m = Ax^n$), ou ($y^m = Ax^{-n}$) ; d'où on tirera ($y = A^{\frac{1}{m}}x^{\frac{n}{m}}$), ou ($y = A^{\frac{1}{m}}x^{\frac{-n}{m}}$).

2°. On concluëra encore de nos suppositions que l'Exposant de x dans la valeur simple de y ne pourra être que négatif ; en effet, x étant infiniment petite, il n'y a qu'un Exposant négatif qui puisse la rendre infinie, comme doit être l'y la plus voisine de l'Assymptote, & dont une de ses

Puissances doit representer la valeur.

3°. Il pourra donc naître quatre cas différens, car si *m* & *n* sont à la fois des nombres impairs, à une *x* positive répondra une *y* positive, & à une *x* négative une *y* négative (nous supposons toujours positif le Coefficient donné *A*); en sorte que les deux Branches seront semblables de figure à celles de l'Hyperbole Conique [*Fig.* 7], desquelles elles pourront cependant differer d'ailleurs par l'Ordre d'infini plus ou moins haut, auquel s'élevera leur premiere Ordonnée.

Mais si, *m* étant un nombre pair, *n* est un nombre impair, à *x* positive répondront deux *y* l'une positive & l'autre négative, & à *x* négative il ne répondra que des *y* imaginaires : les deux Branches seront donc posées toutes deux d'un même côté par

rapport à leur Assymptote commune, & leurs directions seront contraires l'une à l'autre, ainsi qu'il arrive aux deux Branches *AC*, *BG* de l'Hyperbole Cubique de la *Fig.* 8.

Si au contraire, m étant un nombre impair, n est un nombre pair, à x positive & négative il ne répondra qu'une y réelle, & qui sera positive, ce qui formera deux Branches dont les directions seront les mêmes, mais qui seront posées des deux côtés différens de leur Assymptote commune, telles en un mot que les Branches *AE*, *BF* de l'Hyperbole Cubique de la *Fig.* 8.

Et si enfin m & n sont à la fois des nombres pairs, l'Equation réduite ($y^m = Ax^n$) pourra se réduire de nouveau à ces deux autres ($y^{\frac{m}{2}} = Ax^{\frac{n}{2}}$), ($y^{\frac{m}{2}} = -Ax^{\frac{n}{2}}$) & la Courbe sera nécef-

ſairement compoſée de deux portions, dont chacune aura des Branches Infinies, qui ſe détermineront par les régles des cas précédens.

Mais dans la ſuppoſition que la Branche propoſée eût été Parabolique, prenant les y paralleles à ſa derniere direction, plaçant l'Origine dans un point quelconque de l'Axe, & faiſant x infinie, on auroit d'abord prouvé comme ci-deſſus que l'Equation auroit dû ſe réduire à cette forme ($y^m = Ax^n$), ou ($y = A^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}}$); de plus que l'Expoſant de x dans la valeur de y n'auroit pû être que poſitif; enfin, puiſqu'en ce cas y doit être infinie d'un Ordre ſuperieur à celui dont x eſt ſuppoſée l'être elle-même (*voy. la fin du Lem. I.*), m n'auroit pû manquer d'être plus petite que n.

Paſſant enſuite à la diviſion des

cas d'une maniere analogue à celle dont on l'a fait toute à l'heure, on auroit trouvé qu'au premier il devoit répondre des Branches de l'espece de celles de la premiere Parabole Cubique (*Fig.* 9), au second des Branches de l'espece de celles de la seconde Parabole Cubique (*Fig.* 10), & au troisiéme enfin des Branches de l'espece de la Parabole ordinaire ou Conique (*Fig.* 11); & on voit par là que des Branches Hyperboliques ou Paraboliques de l'espece de *BC*, *DC* (*Fig.* 12 & 13) ne peuvent se trouver seules dans des Courbes, & que s'il s'en trouve de telles, il doit par conséquent y en avoir nécessairement encore deux autres qui leur soient Conjuguées.



LEMME SECOND

Où, en ſuppoſant égaux à zero les derniers Termes d'une Equation, on enſeigne à découvrir la ſituation des Sommets de la Courbe qui en eſt le Lieu : ce qui pourra conduire auſſi à la connoiſſance de leur nature, ſoit que ce ſoient des Points Simples, ou des Points Multiples, & ſur-tout lorſqu'ils devront être ſitués dans l'Origine.

Si le dernier Terme d'une Equation indéterminée doit s'évanoüir dans certaines circonſtances, il s'enſuit que dans ces mêmes circonſtances l'Equation deviendra diviſible par ($y = 0$), ou que l'une des Ordonnées de la Courbe qui en ſera le Lieu deviendra infiniment petite, ou enfin que cette Courbe coupera ſon Axe à l'extrémité de l'x convenable à cette circonſtance ; &

par conſéquent les diſtances de l'Origine à chacun des Points où l'Axe coupe la Courbe ſont les ſeules valeurs réelles qui, données à x, puiſſent produire le manquement du dernier Terme.

Or ſi l'on égale à zero le dernier Terme de la Propoſée, & qu'on faſſe ainſi une Equation particuliere & déterminée dont x ſoit l'Inconnuë, cette Equation déterminée devra faire connoître par ſes Racines les valeurs de x propres à faire en effet évanoüir le dernier Terme dans la Propoſée. Elle aura donc pour Racines réelles les diſtances de l'Origine à chacun des Sommets de la Courbe qui ſera le Lieu de la Propoſée, & ſi elle a des Racines égales, pluſieurs Sommets ſe réüniront en un même Point, qui pourra être Multiple de la Multiplicité déſignée par le nombre des Racines égales : il pourra être

aussi ou Simple, ou Multiple d'une Multiplicité inferieure : mais en ce cas la ligne des *x* y deviendra Tangente ou Simple ou Multiple, de façon que le nombre d'Interſections auquel ſon Contact équivaudra ſoit égal à celui dont le nombre des Racines égales ſurpaſſera l'Expoſant de la Multiplicité du Sommet; mais ſi l'Equation déterminée faite du dernier Terme de la Propoſée avoit des Racines imaginaires, on pourroit concevoir pour lors tout autant de Sommets imaginaires, ou d'Interſections de l'Axe avec la Courbe ſituées à une diſtance imaginaire de l'Origine.

De plus ſi l'une des Racines de cette Equation déterminée étoit commune à l'Equation déterminée qu'on pourroit former de même en égalant à zero le Coefficient du pénultiéme Ter-

me, on en concluëroit que la valeur de x désignée par cette Racine porteroit ou à un Point Double, ou à un Point Simple dont y seroit Tangente.

Et si cette Racine étoit encore commune à la troisiéme Equation déterminée qu'on pourroit former en égalant à zero le Coefficient de l'antepénultiéme Terme, ce seroit une marque que la valeur de x qu'elle désigneroit porteroit ou à un Point Triple, ou à un Point Double dont y seroit Tangente, ou enfin à un Point Simple, mais qui seroit Point d'Inflexion, & qui auroit encore pour Tangente l'y qui lui répondroit... & ainsi de suite.

Et au cas que la premiere Equation déterminée eût deux Racines égales, & que ce fût la valeur de ces Racines égales qui divisât la seconde Equation déterminée, le Sommet auquel cette

valeur porteroit ne pourroit dès-lors manquer d'être un Point Double ; puisque son Abciffe & son Ordonnée feroient censées se rencontrer chacune en deux Points ; ce qui ne peut convenir à aucun Point Simple, soit ordinaire, soit Singulier.

Mais de ce que la premiere des Equations déterminées auroit 3, 4, &c Racines égales, & de ce que la valeur de ces Racines diviseroit la seconde, la troisiéme, &c de ces Equations, on ne feroit pas en droit de conclure pareillement que le Sommet auquel cette valeur porteroit dût être nécessairement un Point Triple, Quadruple, &c ; car au lieu d'être, par exemple, un Point Triple, il pourroit n'être qu'un Point Double d'Interfection, dont les Coordonnées qui lui conviendroient seroient les deux Tangentes.

On peut tirer des principes que nous venons d'établir en dernier lieu, une Méthode pour déterminer les conditions qui peuvent rendre les Sommets Points Doubles, & pour faire connoître en même tems à quelle distance de l'Origine de pareils Sommets peuvent être placés. Il suffira pour cela de supposer à la fois égaux à zero 1°. le dernier Terme de la Proposée, 2°. son pénultiéme Terme, 3°. enfin le Polynome qu'on pourra former en multipliant le dernier Terme, membre à membre, par les différens Termes d'une Progression Arithmétique quelconque.

Or pour parvenir au moyen de ces trois suppositions à la détermination de x convenable au Sommet cherché, & aux conditions de son existence, on pourra se servir des Formules que M. Newton a données dans son

Arithmetique Univerſelle, où, ce qui revient au même, on pourra encore diviſer les deux premieres Equations déterminées, que ces ſuppoſitions même donneront, par la troiſiéme, & enſuite le diviſeur de ces diviſions par leur reſte, puis les premiers reſtes par les ſeconds, & ainſi de reſtes en reſtes juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à en trouver qui ne contiennent plus l'indéterminée x; ces derniers reſtes étant faits égaux à zero, donneront les deux Equations des conditions; & ſi on les remplit en effet ces conditions dans les trois Equations déterminées, il réſultera de chacune d'elles une même valeur de x, qui ſera celle qui conviendra au Sommet cherché.

La premiere partie de la Méthode que nous venons de décrire pourroit en particulier conduire ſeule à découvrir les con-

ditions de l'existence des Points Doubles situez sur l'Axe dans les Lignes du quatriéme Ordre qui en ont déja un dans leur Origine, & on les trouveroit telles que M. l'Abbé de Bragelongne les a démontrées à l'art. 71 de son Traité, sans les avoir cherchées analytiquement. On parviendroit de même aux conditions de l'art. 82 du même Ouvrage, si c'étoit de la progression 2, 1, 0, —1, —2, qu'on se servît pour multiplier les différens membres du dernier Terme de la Proposée ordonnée par rapport à z; si de plus on prenoit pour former les trois Equations determinées 1°. le Produit de cette multiplication, 2°. la Somme de ce Produit & du dernier Terme de la Proposée, 3°. son pénultiéme Terme; si enfin on changeoit les Signes de tous les Termes pairs de ces trois Equations

déterminées, qu'on divisât la premiere par *u*, & la seconde par u^2, qu'on y mît par tout *g* au lieu de *u*, & qu'on transposât leurs termes d'une maniere assez extraordinaire.

Or s'il paroît que par ces inversions de Termes, & sur-tout par le changement de la Lettre qui étoit destinée à marquer l'Inconnuë dans les Equations des conditions que donne cet Auteur, il a eu principalement en vûë de cacher la voye par laquelle il étoit parvenu à trouver ses conditions, on ne voit pas de même par quel motif il a usé d'un pareil déguisement. D'ailleurs on pourroit se plaindre de ce qu'il n'a point donné ses conditions dégagées, comme elles pouvoient l'être, de l'Indéterminée qu'elles renferment; ce qui les auroit réduites du nombre de trois, à celui de deux. Enfin par l'observa-

tion que nous avons faite plus haut on doit appercevoir que les Méthodes de l'espece de celle-ci ne peuvent s'étendre aux Points Triples, Quadruples, &c; & c'est aussi ce qui nous engagera dans la suite de cet Ouvrage à en chercher d'autres pour le même usage, mais qui soient générales & applicables à la recherche des Sommets d'une Multiplicité quelconque.

Revenant quant à présent aux Equations déterminées dont il a été parlé au commencement de ce Lemme, il nous reste à faire remarquer 1°. que toutes ces Equations auront ($x = 0$) pour Racine commune, s'il leur manque à toutes leur Terme constant, ou s'il manque les plus basses Puissances de y dans le dernier Terme de la Proposée ordonnée par rapport à x : 2°. que zero sera la valeur de plusieurs

Racines égales de la premiere de ces Equations, s'il manque plusieurs des plus basses Puissances de x dans le dernier Terme de la Proposée ordonnée par rapport à y.

Or de chacune de ces Propositions combinées avec les autres que nous avons démontrées ci-dessus, il suit généralement

En premier lieu que, si le Terme tout constant manque dans l'Equation d'une Courbe, son Origine doit nécessairement être placée dans son Perimêtre.

En second lieu que, s'il manque à l'Equation les deux plus bas de ses rangs horizontaux, l'Origine doit être un Point Double; mais si avec le Terme constant il ne manquoit que l'un des deux membres dont peut être composé le second rang horizontal (en montant depuis le plus bas de tous), l'Origine seroit alors

alors un Point Simple, mais qui auroit pour Tangente la premiere *y*, ou la premiere *x*, selon que ce seroit le Coefficient *b*, ou le Coefficient *c* qui seroit devenu = o.

Troisiémement, remontant toujours dans les lignes *AH*, *AL* [*Fig.* 7], on prouvera que s'il manque encore le Terme dans lequel le Quarré y^2, ou bien le Quarré x^2 doit se trouver *non affecté*, ou sans aucun mélange de la Coordonnée de sa Racine, c'est-à-dire, si *a*, *b*, *e*, ou *a*, *c*, *g* sont à la fois = o, l'Origine sera ou un Point Triple, ou un Point Double, qui ait dans le premier cas la premiere *y*, & dans le second la premiere *x* pour Tangente, ou si enfin l'Origine est déterminée par les raisons rapportées dans l'Article précédent à n'être qu'un Point Simple, la premiere *y*, ou la premiere *x* y deviendra Tangente dans un

Point d'Inflexion... &c: on donnera au reste dans les Lemmes suivans des Méthodes pour reconnoître plus facilement tous les différens cas que des manquemens semblables peuvent produire, & on y mettra en même tems dans un plus grand jour la Théorie générale des Points Multiples: pour les Inverses qu'on pourroit déja tirer de celui-ci, nous croyons qu'on doit dès à présent en appercevoir la verité avec toute l'évidence possible.

Observez ici en finissant que le dernier Terme de la Proposée réduit en Equation devant avoir pour Racines les distances de l'Origine à chacun des Sommets réels, ou imaginaires, il faut par conséquent, qu'étant divisé par le Coefficient de celui de ses membres où x monte au degré le plus élevé, il represente le Produit qu'on pourroit for-

mer en multipliant l'un par l'autre les Binomes positifs, ou négatifs composés de x plus ou moins chacune de ces distances, ou bien en multipliant successivement l'une par l'autre les distances du point d'Interfection de x & de y à chacun des Sommets réels ou imaginaires.

Or comme le dernier Terme de l'Equation indéterminée est lui même le Produit de toutes les Ordonnées réelles ou imaginaires, il s'ensuit généralement que dans une Courbe quelconque le Produit de toutes les Ordonnées réelles, & imaginaires est au Produit de toutes les distances de l'Interfection des x, & des y à chacun des Sommets réels ou imaginaires, comme est à l'unité positive, ou négative le Coefficient de la plus haute Puissance de x dans le dernier Terme de l'Equation de la Courbe.

Par conséquent dans toute Ligne du troisiéme Ordre en particulier, pourvû que l'Axe y rencontre la Courbe en trois points, & que chaque Ordonnée y ait aussi perpetuellement trois valeurs, les deux Parallelebipedes qu'on peut former, l'un sur les trois Ordonnées, l'autre sur les trois distances de chacun des Sommets à l'Interfection des x & des y, doivent nécessairement être en raison donnée, ainsi que l'a dit en effet M. Newton, au commencement de son Traité des Lignes du troisiéme Ordre (*voy.* l'Article 3[me] de cet Ouvrage sur les proprietés des Lignes du troisiéme Ordre analogues à celles des Sections Coniques).

On démontreroit avec la même facilité l'Article 4[me], qui n'est qu'un Corollaire de celui-ci : mais nous ne croyons pas qu'il soit à propos de nous y arrêter, n'ayant

même placé ici la démonſtration du troiſiéme, que pour faire par là d'autant mieux connoître le grand nombre d'uſages auſquels nos principes pouvoient s'appliquer ; & paſſons plutôt maintenant à la détermination des figures que peuvent recevoir les Points par leſquels peuvent s'unir deux parties d'une même Branche de Courbe.

REMARQUE

Où l'on prouve que les deux parties d'une même Branche de Courbe ne peuvent s'unir l'une à l'autre que par des Points ſemblables de figure, ou aux Points ordinaires, ou aux Inflexions, ou aux Rebrouſſemens ordinaires, & que par conſéquent il eſt impoſſible qu'il ſe rencontre dans les Courbes de cette eſpece de Points, que M. le Marquis de l'Hôpital, qui en a parlé le

premier, a nommés Rebroussemens de la seconde espece.

Les Géométres anciens n'ignoroient point que les deux parties d'une même Branche de Courbe pouvoient s'unir l'une à l'autre par des Points de trois figures différentes, les Points ordinaires, tels que font tous ceux des Sections Coniques, les Inflexions & les Rebroussemens ordinaires, dont la Conchoide & la Cissoide leur présentoient des exemples, mais ils s'étoient bornés à cette premiere découverte, & destitués, comme ils l'étoient, du secours de l'Algébre, il devoit en effet leur être assez difficile d'imaginer que chacune de ces trois especes de Points ne fût, pour ainsi dire, que le modéle d'une infinité d'autres, dont les Courbes seroient pareillement susceptibles, & qui différeroient toutes

entr'elles essentiellement, quoiqu'imperceptiblement; selon que leur courbure seroit ou infiniment petite, ou infinie d'un ordre plus ou moins élevé, exprimé par un nombre entier, ou fractionaire; ou bien encore selon que les Points qui leur appartiendroient pourroient être chargés d'un plus ou moins grand nombre de Points Conjugués, & Adhérents, de telle ou telle espece, situés à l'égard l'un de l'autre de telle ou telle maniere.

Ces verités, dont la connoissance manquoit aux Anciens, ont été annoncées vers la fin du siécle précédent par M. Newton, tant dans son Scholie sur le Lemme onziéme de ce grand & bel Ouvrage qu'il a donné au Public sous le titre de *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle*, que dans les endroits de son Traité des Lignes du troisiéme Ordre

où il eſt queſtion des Points Conjugués, & lorſque M. le Marquis de l'Hôpital, membre illuſtre de l'Académie Royale des Sciences de Paris, a composé ſon *Analyſe des Infiniment Petits*, elles ne pouvoient être inconnuës à cet Académicien. Néanmoins dans ce Livre, qui d'ailleurs mérite certainement de grands éloges, il a négligé de donner, comme il auroit pû le faire, une Théorie détaillée, exacte, & complette des Points Singuliers ou Remarquables qui pouvoient ſe former par les différentes modifications ou combinaiſons des trois eſpeces primordiales que nous avons décrites au commencement de cette Remarque; ſoit que ces nouveaux Points fuſſent Simples, que réellement ils n'appartinſent qu'à une ſeule Branche, & qu'ils n'euſſent qu'une direction; ſoit qu'étant Multiples d'une Multi-
plicité

imperceptible, appartenant en apparence à une ſeule Branche, mais renfermant réellement eux-mêmes pluſieurs Branches *Evanoüiſſantes*, ou bien encore étant chargés de differens Points Conjugués, leur unique direction réelle reſultât des valeurs égales de toutes les Racines réelles de l'Equation qui devroit la déterminer, & qui pourroit avoir auſſi des Racines imaginaires; ſoit enfin qu'étant encore Multiples mais d'une Multiplicité apparente, ils euſſent pluſieurs directions differentes indiquées par les Racines réelles & inégales de l'Equation dont on vient de parler, & que par conſéquent ils appartinſſent à la fois à pluſieurs Branches qui pourroient s'y rencontrer mutuellement de toutes les manieres concevables. Au lieu de s'arrêter ſur une pareille énumeration qui auroit pû en effet être du reſſort

de l'Analyse des infiniment petits, M. de l'Hôpital a tourné ses vûës d'un autre côté, & il s'est attaché (*voy. Anal. des infin. pet. Pag.* 102.) à établir la possibilité d'une prétenduë quatriéme Espece de Point Singulier, qu'il a nommé *Point de Rebroussement de la seconde Espece*, dont il à dit que personne n'avoit parlé avant lui, & qu'il a fait naître du Développement d'un Point d'Infléxion. On voit dans la *Fig.* 14. la forme dont il seroit, s'il pouvoit exister.

Ce Rebroussement a été aussi adopté depuis par M. de Maupertuis Géométre d'un grand nom dans la même Académie de Paris. L'Ouvrage où ce dernier Académicien en a fait mention est un de ceux que renferment les Recueils de l'Académie dont il est Membre.* Le dessein

* Voyez les Mem. de l'Ac. Roy. des Sc. de Par. an. 1729. pag. 277, 279 & autres. Edit. de Paris.

de l'Auteur dans ce Mémoire paroît avoir été de découvrir des formations nouvelles & ingenieuſes de differens Points Singuliers ou Remarquables ; mais paſſant un peu trop rapidement ſur la poſſibilité de l'exiſtence de celui dont il eſt queſtion maintenant, il a prétendu que ce Point en particulier pourroit ſe former par la réünion d'une Infléxion avec un Rebrouſſement ordinaire, comme cela ſeroit vrai en effet, ſi un Rebrouſſement & une Infléxion pouvoient réellement ſe réunir dans un même Point & une même Branche de Courbe.

Or, puiſque ces deux Géométres ont négligé d'examiner, le premier ſi le Perimetre tracé par l'Evolution d'une Courbe quelconque ne pouvoit pas être néceſſairement Conjugué à une autre partie que le ſeul Développe-

ment ordinaire ne feroit point conoître, & le second s'il pouvoit se faire qu'un Rebroussement, & une Infléxion se trouvassent effectivement compliqués dans un même Point, & une même Branche de Courbe, nous esperons par cette raison qu'on ne verra point avec surprise que nous entreprenions ici de démontrer *à priori* l'impossibilité du prétendu Rebroussement dont ils n'ont établi l'un & l'autre l'existence que sur des suppositions peu exactes.

Pour cet effet qu'on place l'Origine d'une Courbe dans un Point Singulier quelconque de son Perimetre, ou si l'on veut même dans plusieurs à la fois, & qu'on y prenne $x = o$; on prouvera d'abord facilement, & de la même maniere dont on l'a fait à la Page 47, que la valeur correspondante de y devra s'exprimer par un seul Terme, ou

que l'Equation proposée pourra dans ce cas particulier se décomposer en d'autres lesquelles (*m* & *n* étant des nombres entiers quelconques) seront nécessairement de cette forme $y^{\pm m} = Ax^{\pm n}$, & parmi celles-ci les seules qui pourront faire connoître la nature des Points cherchés devront être de cette autre forme $y^{+m} = Ax^{+n}$; car sans cela *y* ne pourroit pas devenir $= 0$ dans l'Origine. Enfin si on suppose que la premiere *y* soit Tangente au Point en question, *m* sera nécessairement plus grande que *n*.

Mais 1°. si, *m* étant un nombre pair, *n* est au contraire un nombre impair, à *x* positive répondront une *y* positive, & une négative, & à *x* négative il ne répondra que des *y* imaginaires; d'où naîtront avec les Points ordinaires des Courbes les Serpen-

temens, & les Lemniſceros infiniment petits de M. de Maupertuis, & de M. de Bragelongne, ou les Points qui ſont Singuliers mais imperceptibles, c'eſt-à-dire, tous ceux qui paroiſſent à la vûë ſemblables aux Points ordinaires.

2°. Si m & n ſont l'une & l'autre des nombres impairs, à x poſitive répondra une y poſitive, & à x négative une y négative ; le Point repreſentera donc une Infléxion qui pourra être d'un Ordre plus ou moins élevé.

3°. Si m étant un nombre impair, n eſt un nombre pair, à x poſitive & négative il ne répondra qu'une ſeule y, qui ſera poſitive dans l'un & l'autre cas, & cela donnera des Points ſemblables de figure au Rebrouſſement ordinaire.

4°. Enfin ſi m & n ſont à la fois des nombres pairs, l'Equation ($y^{+m} = Ax^{+n}$) pourra ſe

décompoſer en ces deux autres $(y^{\frac{m}{2}} = A^{\frac{1}{2}} x^{\frac{n}{2}})$ & $(y^{\frac{m}{2}} = -A^{\frac{1}{2}} x^{\frac{n}{2}})$ qui ſeront encore ſi elles ont des Parametres réels, dans les conditions dont nous venons de parcourir tous les cas, & la Courbe ſera par conſéquent compoſée pour lors de pluſieurs Branches des eſpeces qui ont été décrites dans les trois premiers de ces cas : ainſi, ſi l'Equation où les Expoſans de x, & de y doivent former une Progreſſion Arithmétique (*voy. Pag.* 48. 49.) étoit $(y^4 = b^2 x^2)$ le Point Singulier feroit la réunion des Sommets de deux Paraboles Coniques égales & adoſſées, au lieu que ce Point ſeroit une Oſculation de deux Sommets Paraboliques où la Concavité d'une des Paraboles regarderoit la Convexité de l'autre, ſi l'Equation où les

Expoſans de x & de y doivent être en Progreſſion Arithmétique avoit été ($y^4 \pm 2bxy^2 + b^2x^2 = o$).

Il eſt donc évident que tous les Points des Courbes, qui n'appartiennent pas à la fois à deux ou pluſieurs Branches, doivent être de la forme ou des Points ordinaires, ou des Infléxions, ou des Rebrouſſemens ordinaires; & ceux qui appartiennent à pluſieurs Branches à la fois ne pouvant être que d'une forme qui réſulte des differentes Combinaiſons qu'on peut faire des trois premieres, il s'enſuit que le prétendu Rebrouſſement de la ſeconde Eſpece ne peut avoir lieu dans les Courbes, & que ce que M. le Marquis de l'Hôpital a pris pour un Point pareil n'étoit autre choſe qu'une demie Oſculation, c'eſt-à-dire, la com-

plication des ſeules parties ſupérieures de deux Branches qui s'embraſſoient (*Fig.* 15.), & dont les parties inferieures lui ont échappé, parce qu'elles ne pouvoient être décrites comme les premieres par l'Evolution de la Courbe à Infléxion qu'il avoit entrepris de déveloper.

En effet ſoit que les deux parties d'une Branche de Courbe ſoient poſées bout à bout l'une de l'autre, ſoit qu'elles ſoient repliées l'une ſur l'autre dans une étenduë infiniment petite, ce ſeront toujours des Regles infiniment peu differentes qui dévront déterminer la Courbure des Points qui dans ces deux parties ſont infiniment voiſins de celui qui eſt commun à chacune d'elles. Cependant M. de Maupertuis donne pour caractere du Point en queſtion que dans l'une des parties de la Branche à laquelle

il appartiendroit deux Elemens seroient situés bout à bout l'un de l'autre, au lieu que cela ne pourroit arriver dans l'autre partie. Voila donc des Regles infiniment differentes pour connoître la Courbure des Points qui, dans deux parties d'une même Branche unies l'une à l'autre par le prétendu Rebroussement de la seconde Espece, seroient infiniment voisins de ce Rebroussement : un pareil Point ne peut donc exister.

De plus le Développement entier d'une Courbe à Infléxion n'est possible qu'en concevant que dans l'Infléxion le fil qui se dévelope traverse la Dévelopée, & que la partie dont il s'est dévelopé ne lui fasse point d'obstacle dans son nouveau mouvement de Rotation, qui est contraire à celui qu'il avoit eu jusqu'alors. Or tout cela n'étant

point naturel, & un mouvement semblable ne devant point par conséquent être dit Continu, il paroît s'ensuivre que les deux portions de Courbe que l'extrémité du fil décrira avant, & après avoir touché l'Infléxion ne pourront appartenir, je ne dis pas à une même ligne, mais au moins à une même Branche. (Je dois cette troisiéme preuve à M. l'Abbé Nicolo Martini, Professeur célébre de Mathématique dans l'Université de Naples, & à qui, pendant le séjour que j'ai fait en cette Ville, j'avois eu occasion de communiquer ce que je pensois sur cette matiere).

Enfin de ce que l'on a démontré dans le Lemme précédent (*Pag.* 64, 65, 66.) il est facile de conclure que, si la premiere *y* étoit Tangente d'une Branche qu'elle seroit censée rencontrer en quatre points, il devroit manquer dans l'Equation avec le

Terme tout Conſtant les plus baſſes Puiſſances de *y* qui pourroient y être multipliées par des Coefficiens Conſtans, & réciproquement que, s'il manquoit à la fois à l'Equation tous ces membres-là, toute Branche touchée par la premiere *y* ſeroit cenſée être rencontrée par elle en quatre points. Par conſéquent puiſque les deux Branches d'un Rebrouſſement de la ſeconde Eſpece devroient, ſi ce Point étoit poſſible, être *Coincidentes*, ou avoir une Tangente commune, l'une d'elles ne pourroit être cenſée rencontrée en quatre points par cette Tangente commune, ſans que l'autre ne dût l'être auſſi, ou, ce qui revient au même, l'une des Branches qui forment un Rebrouſſement ne ſçauroit ſubir une Infléxion dans ce Rebrouſſement, ſans que l'autre Branche en ſubiſſe une pareille.

La seconde Espece de Rebroussement qu'a imaginée M. le Marquis de l'Hôpital, & que M. de Mauperpuis a adoptée après lui est donc absolument impossible.

Il n'en est pas de même des differens Ordres de Serpentemens que le dernier de ces Géometres a distingués avant M. de Bragelongne : ils ont lieu en effet dans les Courbes, & peuvent y être conçus comme le passage de deux, quatre, six, huit... Infléxions réelles à autant d'Infléxions imaginaires : mais nous ne pensons pas qu'il doive, comme M. de Maupertuis le prétend, se trouver nécessairement de pareils Serpentemens dans les Courbes qui ne peuvent être rencontrées par des Droites que dans un nombre de points moindre de deux, de quatre, de six, de huit unités... que celui qui est désigné par le Degré de leur Equation.

C'eſt plutôt l'alternative entre l'exiſtence d'un pareil Serpentement & celle des Inflexions imaginaires, & qui le feroient parceque leur diſtance à l'Origine cherchée par les Regles propres à cet effet ſe trouveroit imaginaire, c'eſt, dis-je, plutôt cette alternative qui devient pour lors inévitable. On en trouvera plus bas la preuve dans des Exemples, & on expliquera bientôt plus clairement ce qu'on entend en général par le mot d'Infléxion imaginaire.

Quant au Point de *Double Pointe* dont M. de Maupertuis a encore parlé dans le même Ouvrage, on doit remarquer que c'eſt le même que M. de Bragelongne a fait connoître une année après ſous le nom de *Lemniſceros Infiniment Petit.* On pourroit généralement le définir *Point Triple à trois directions égales, ou Coincidentes, & d'une Multiplicité*

invisible, & il paroît en conséquence qu'il seroit encore plus naturel de le supposer formé par l'Evanoüissement de deux des trois feüilles d'un *Trefle* (*Fig.* 16 & 17): car, puisqu'il est Point Triple, le Lemnisceros fini dont M. de Bragelongne le déduit (*Fig.* 18. & 19.) ne peut le former dans la rigueur Géometrique, qu'en passant par l'état de Trefle; sans cela l'Evanoüissement de deux Nœuds du Lemnisceros, présenteroit à l'imagination, ainsi que la formation de M. de Maupertuis (*Fig.* 20. & 21.), l'extrême approchement de trois Points Doubles, & non un veritable Point Triple.

Enfin on donnera plus bas les moyens de distinguer les Points Simples, mais Singuliers des Points Multiples d'une Multiplicité imperceptible, soit que leur Multiplicité provienne de

l'Entrelacement invisible de plusieurs Branches Evanoüissantes, ou qu'elle soit produite par l'Adherence de differens Points Conjugués, & on enseignera tout à l'heure ce que peuvent être les Points qui résultent de l'Osculation de deux Sommets Paraboliques à Paramétres imaginaires.

LEMME TROISIE'ME

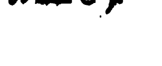
Où l'on enseigne la maniere de trouver la valeur de l'Ordonnée primitive dans une direction quelconque.

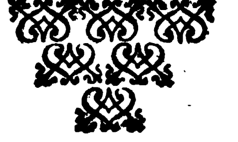
L'on a vû au commencement de cet Ouvrage (*Pag.* 2.) que pour Transformer une Equation de Courbe, dont les Coordonnées seroient x, & y, de façon que la situation de son Ordonnée devînt quelconque, il suffisoit (m & n étant deux nombres indéterminés, n en particulier pouvant être

être positif ou négatif;, & z, & u devant exprimer les Coordonnées nouvelles) de substituer respectivement à la place de x, & de y les deux valeurs $z+nu$, & mu, & il suit de-là que pour trouver les valeurs de l'Ordonnée primitive dans une direction quelconque, il suffiroit aussi de faire $z=o$ dans la Transformée qui proviendroit d'une pareille substitution, ou de substituer simplement dans la Proposée nu, & mu à la place de x, & de y, ce qui donneroit une Equation déterminée, dont u seroit l'Inconnuë, & dont les Racines representeroient les valeurs cherchées.

Or la Substitution de nu, & de mu au lieu de x, & de y introduisant des n par tout où il y avoit des x, des m par tout où se trouvoient des y, & enfin des u par tout où il pouvoit se trouver ou

des x, ou des y, il eſt donc évident que pour connoître promptement le reſultat de cette derniere ſubſtitution, il faudra ſuppoſer, que x, & y repreſentent n, & m dans la Propoſée, & multiplier enſuite chacun de ſes Rangs Horizontaux par la Puiſſance de u dont l'Expoſant ſera égal au Degré de ce Rang diminué d'une unité, & ainſi l'Equation générale de la *Fig.* 3e. donnera ($\overline{a + bm + cn}.\, u + \overline{em^2 + fmn + gn^2}.\, u^2 + \overline{hm^3 + im^2n + kmn^2 + ln^3}.\, u^3 + \&c. = 0$).





COROLLAIRE PREMIER

Où l'on prouve que les manquemens des Rangs Horizontaux, & inferieurs d'une Equation désignent que l'Origine de la Courbe dont elle est le Lieu est dans un Point Multiple.

On peut conclure de là que si l'Origine d'une Courbe est placée dans un Point Multiple, dont la Multiplicité ait pour Exposant un nombre quelconque *s*, il doit manquer dans son Equation les *s* premiers Rangs Horizontaux à commencer du plus bas d'entre eux, ou de celui qui ne devroit contenir que la Grandeur Constante; car si l'Origine est placée dans un tel Point, l'Ordonnée primitive, dans quelque position qu'on veuille la supposer, aura nécessairement *s* valeurs égales à zero, ou l'Equation dont les Racines doivent représenter ses valeurs sera nécessairement divi-

ſible par u^s, ou bien encore il manquera infailliblement à cette Equation les s Termes, ou u ſeroit élevé à des Expoſans moindres que s. Or les Termes (a), $(\overline{bm+cn}.u)$, $(\overline{em^2+fmn+gn^2}.u^2)$, $(\overline{hm^3+im^2n+kmn^2+ln^3}.u^3)$..... &c. ne peuvent être égaux à zero dans toutes les ſuppoſitions poſſibles ſur le rapport de m à n qu'autant que a, b, c, e, f, g, h, i, k, l... &c. ſont chacune en particulier égales auſſi à zero. Donc.... &c. & l'Inverſe de cette Propoſition ſe démontreroit d'une maniere ſemblable.

On doit remarquer ici que cette derniere Démonſtration eſt abſolument generale à la difference de celle qu'a donnée M. l'Abbé de Bragelongne pour les Points Doubles, & les Points Tri-

ples: celle de ce Géometre paroît au contraire ne pouvoir s'appliquer aux Points Quadruples, qu'en faisant usage de deux Transformées, aux Points Quintuples, qu'en se servant de trois Transformées, en un mot aux Points d'une Multiplicité quelconque exprimée par s, qu'en faisant usage de $s - 2$ Transformées.

COROLLAIRE SECOND

Où l'on enseigne à tirer les Tangentes des Points Multiples lorsqu'ils sont situés dans l'Origine, ce qui peut conduire aux Divisions generales des Points Multiples.

L'Origine étant toujours placée dans un Point Multiple dont la Multiplicité soit exprimée par s, & les s premiers Rangs Horizontaux manquant en conséquence dans l'Equation, si l'on fait de plus une Equation du $\overline{s+2}^{ieme}$

Rang, & qu'on prenne dans cette Equation la valeur de $\frac{n}{m}$ representés par celle de $\frac{x}{y}$, l'Ordonnée primitive de la situation particuliere qui répondra à cette valeur, aura non seulement s valeurs $= 0$, mais même $s + 1$ valeurs $= 0$; d'où il suit que cette Ordonnée primitive sera Tangente au Point Multiple, & cela fournit une Méthode fort simple pour tirer les Tangentes des Points Multiples qui sont placés dans l'Origine. Il suffira pour cela de prendre sur les directions des x, & des y, & en partant de l'Origine deux Droites dont le rapport ait pour valeur celle qu'on aura trouvée pour le rapport de n à m, ou pour la Fraction $\frac{n}{m}$, ou enfin pour la Fraction $\frac{x}{y}$, & la troisiéme Droite qui joindra les extrémités de ces deux-là ne pourra manquer d'être pa-

rallele à la Tangente cherchée. Or comme cette Tangente doit d'ailleurs passer par l'Origine, il sera par conséquent fort aisé de la construire.

M. Saurin, l'un des illustres Membres de l'Académie Royale des Sciences de Paris, ayant déja fait connoître cette méthode dans un Ouvrage * où il l'a ingenieusement déduite des principes mêmes du Calcul Differentiel, & où il s'en est servi pour construire les Tangentes de l'Interfection de plusieurs Rameaux de Courbe, nous n'avons garde de nous l'approprier ici : mais nous ne pouvons nous empêcher d'y remarquer qu'il est assez surprenant que M. l'Abbé de Bragelongne, qui cite ce même Ouvrage, ait eu cependant conti-

* Voyez les Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences de Paris, an. 1723. p. 223. Edit. de Paris.

tinuellement recours aux doubles & aux triples Differentiations dans des Exemples dont la solution, au moyen des Regles que M. Saurin avoit données, dépendoit uniquement de l'inspection seule de deux ou trois Termes de l'Equation proposée. (*Voyez* les Articles 63, 65, 67, 69, 137, & plusieurs autres du Traité que nous avons déja cité.)

La conséquence que nous venons de tirer en dernier lieu pourroit nous mener aux Divisions générales des Points Multiples qu'ont déja données les Auteurs qui ont écrit sur cette matiere. Ainsi l'Origine étant placée dans un Point Double, & les deux premiers Rangs manquant par conséquent dans l'Equation de la Courbe, si l'Equation particuliere qu'on peut faire du troisiéme Rang a ses deux Racines imaginaires, le Point doit être un Point

Point ſans Tangente, ou ſans direction, & à plus forte raiſon ſans étenduë; il ne pourra donc être lié à aucun autre point de la Courbe, mais il devra ſe trouver iſolé ſur le Plan de cette Courbe, où il ne ſera déterminé que par ſa ſeule diſtance de l'Origine meſurée ſur une Droite de poſition donnée : ce ſera en un mot le Point Conjugué inviſible, dont M. Newton a donné la définition dans ſon Traité ſur les Lignes du troiſiéme Ordre, & que ce Geometre a fait naître de l'évanouiſſement d'une Ovale Conjuguée, formation qui lui convient en effet.

Si les deux Racines de l'Equation dont nous venons de parler ſont réelles & inégales, le Point ſera une Interſection de deux Branches (*fig.* 23.), & on pourra l'appeller Nœud, Point de Croix, ou Point d'Interſection.

Si enfin ces deux Racines sont réelles & égales, le Point en ce dernier cas pourra être ou un Rebroussement (*fig* 24.), ou une Osculation de deux Branches (*fig.* 25. & 26.) : on a donné la notion de l'un & de l'autre dans la Remarque sur le Lemme second.

L'Osculation en particulier aura lieu, ainsi qu'on l'a vû dans cette Remarque, si les Exposans de x & de y sont pairs à la fois dans l'Equation qui peut donner la valeur de l'Ordonnée parallele à la direction du Point Singulier, & correspondante à une Abscisse nulle, & si par conséquent cette Equation peut se décomposer en deux autres, qui seront chacune à des Sommets de Paraboles d'Ordres plus ou moins élevés.

Or pour prendre une idée juste de la nature & des subdivisions de l'Osculation, il importe surtout

de faire attention aux Coefficiens de x dans ces deux Equation que nous pourrions appeller Composantes, ou, ce qui est la même chose, aux Paramêtres des deux Paraboles dont les Sommets formeront l'Osculation proposée.

Car les deux Paraboles étant par exemple Coniques, ce qui produit la seule espece d'Osculation dont les Lignes du quatriéme Ordre soient susceptibles, si de plus leurs Paramêtres sont réels, leurs Sommets se baiseront (*fig.* 25.), ou s'embrasseront (*fig.* 26), selon que ces Paramêtres seront ou de Signe different, ou de même Signe; c'est-à-dire, que dans le premier cas ils se tourneront mutuellement leurs Convexités, au lieu que dans le Second la Convexité de l'un regardera la Concavité de l'autre, ainsi qu'on l'a pu voir dans les exemples rapportés ci-dessus (*page* 72. 80.)

il feroit au contraire impossible en rigueur de lui supposer de Tangente, & son Ordonnée pourroit seulement être censée équivalente à une Tangente Double.

La division des Points Triples se fera avec la même facilité. On supposera pour cela l'Origine placée dans un Point pareil, ce qui fera manquer dans l'Equation de la Courbe qui sera chargée de ce Point les trois premiers de ses Rangs Horizontaux inférieurs.

Or si l'Equation particuliere qu'on pourra faire du quatriéme Rang à deux Racines imaginaires, le Point Triple sera formé par l'adhérence d'un Point Conjugué de la premiere Espéce sur une des Branches de la Courbe, ce qui rendra imperceptibles & sa Multiplicité, & sa Singularité.

Si les trois Racines de cette Equation sont réelles & inégales,

il proviendra de l'interſection de trois différentes Branches, ainſi qu'il arrive par exemple dans le Trefle de la *Fig* 16.

Si les trois Racines étant toujours réelles deux d'entr'elles ſont égales l'une à l'autre, le Point ſera produit par l'adhérence ou d'un Rebrouſſemem (*fig.* 22.), ou d'une Oſculation (*fig.* 29. & 30), ou d'un Point Conjugué de la ſeconde Eſpéce ſur une Branche dont la direction ſera differente de celle qui conviendra au Point Double adhérent.

Si enfin l'Equation que nous avons indiquée à ſes trois Racines réelles & égales, le Point Triple pourra en ce dernier cas être formé par l'adhérence ou d'un Rebrouſſement (*fig.* 31.), ou d'une Oſculation (*fig.* 32.), ou d'un Point Conjugué de la ſeconde Eſpéce ſur une Branche d'une direction coincidente avec la direc-

tion propre de ces Points Doubles: * mais il pourra provenir encor de l'évanouissement de deux des trois feüilles d'un Trefle, ou d'une autre figure qui ne differeroit du Trefle qu'en ce que les deux Branches qui devroient former une de ses feüilles, au lieu de s'unir pour la former en effet, se prolongeroient au contraire à l'infini sans se joindre. Ce sera donc alors ce Point d'une Multiplicité invisible, dont nous avons parlé plus haut (*voy. pag.* 87.), & que M. l'Abbé de Bragelongne a nommé Lemniscеros infiniment petit. Il est de tous les Points Triples à trois directions égales ou coincidentes le seul qui puisse avoir lieu dans

* Observés que si nous paroissons ici ou dans la suite attribuer une direction au Point Conjugué de la seconde Espéce, nous n'entendons lui en attribuer en effet qu'improprement & dans le sens qui a été exposé ci-dessus. (*page* 101.).

le quatriéme Ordre des Lignes, parce que la Tangente de tous les autres doit être censée, ainsi que nous le ferons voir tout-à-l'heure, les rencontrer en plus de quatre points.

Nous ne nous arrêterons pas à donner ici les divisions & subdivisions des Points Multiples d'une Multiplicité supérieure : mais nous croyons devoir remarquer en passant quelques fautes assez considérables, qui sont échappées à M. l'Abbé de Bragelongne concernant cette matiere.

En premier lieu, lorsque ce Geométre parle des Osculations, il omet l'Espéce où les deux Branches s'embrasseroient au lieu de se baiser, c'est-à-dire, ou la Convéxité de l'une de ces Branches regarderoit la Concavité de l'autre : cependant cette Espéce qu'il paroît n'avoir point connuë, & qu'on pourroit appeller *Embrasse-*

ment, pour la distinguer de l'autre à qui le nom commun d'Osculation conviendroit plus proprement, cette Espéce, dis je, n'appartient pas moins que l'Osculation proprement dite aux Lignes du quatriéme Ordre.

Au reste la preuve complette de l'omission que nous imputons à cet Auteur résulte de ce que, vers la fin de l'*Art.* 128. de son Traité, il conclut l'existence de ce qu'il appelle une *Lemniscate infiniment petite Conjuguée* de l'impossibilité qu'il y a, dans l'Espéce dont il fait mention, à concevoir des Ordonnées réelles *du côté positif*, jusqu'à une certaine distance du Point dont il examine la nature. Or pour que l'existence de sa prétenduë Lemniscate infiniment petite soit indiquée, il faut de plus que les Ordonnées manquent de même *du côté négatif*, comme elles y manquent en effet dans l'exem-

ple qu'il propose : sans cela le Point auroit été un Embrassement, dont les Concavités se seroient tournées du côté des x négatives.

2°. Cet Auteur fait naître généralement le Point que nous avons appellé Point Conjugué de la seconde Espéce, ou Osculation de deux Sommets Paraboliques à Paramêtres imaginaires, ou mixtes imaginaires, il le fait, dis-je, naître généralement de l'évanouissement d'une Lemniscate Conjuguée & finie, & c'est par cette raison qu'il le nomme Lemniscate infiniment petite Conjuguée. Or c'est avoir pris l'Individu pour l'Espéce. En effet il peut être vrai que le Point en question soit produit par un semblable évanouissement, si les Paramêtres des Sommets Paraboliques qui se baisent en ce Point sont égaux de quantité, par conséquent imaginaires purs, & non mixtes imagi-

naires, & de plus de Signe different. C'est ainsi que dans l'Exemple que propose M. de B. à l'Art, 129. de son Traité, & où se trouve en effet un Point Conjugué de la seconde Espéce provenant de l'évanouissement d'une Lemniscate Conjuguée, l'Equation rapportée à des Ordonnées paralleles à la direction unique du Point Double placé dans l'Origine deviendroit ($n^2u^2 - bz + b^2z^2 = o$) (n exprimant le rapport du Côté & de la Baze du Triangle Isoscele qu'on pourroit construire sur les directions des deux Coordonnées anciennes). Celle qui donneroit la valeur de u dans la naissance de z seroit donc ($n^4u^4 + b^2z^2 = o$), laquelle se décompose en ces deux autres ($n^2 u^2 = bz \times + \sqrt{-1}$), & ($n^2 u^2 = bz \times - \sqrt{-1}$), dont les Paramêtres sont égaux de quantité, imaginaires purs, & de Signe different.

Mais dans le plus grand nombre des cas possibles, les Paramêtres des deux Sommets Paraboliques ne se trouvent point dans les trois conditions que nous venons de rapporter : ainsi nous servant du même exemple que l'Auteur indique dans l'Avertissement qu'il a mis à la suite de l'*Art.* 129., & dont l'Equation est ($y^4 - \frac{1}{2} bxy^2 + x^4 - 2bx^3 + b^2x^2 = o$), l'Equation particuliere qui dans cet exemple devroit donner la valeur de y convenable à la naissance de x seroit ($y^4 - \frac{1}{2} bxy^2 + b^2x^2 = o$), laquelle se décompose en ces deux autres ($yy = \frac{1}{4} bx \times \overline{1 + \sqrt{-15}}$), & ($yy = \frac{1}{4} bx \times \overline{1 - \sqrt{-15}}$), dont les Paramêtres ne suivent point les loix ci-dessus énoncées.

Aussi dans cette Espéce-là, ne peut-on point dire que le Point Double soit formé par l'évanouis-

ſement d'aucune Lemniſcate. En effet ſi on ajoûtoit à l'Equation un Terme, comme $-c^2y^2$, propre à porter ſur la Ligne des *y*, en deça, & en dela du Sommet, deux des quatre interſections coincidentes de la Courbe & de cette Ligne des *y*, alors, bien loin d'appercevoir une nouvelle Lemniſcate, on verroit au contraire diſparoître une autre Lemniſcate, ou plutôt (*voy. fig.* 33.) une eſpéce de *Bezace* verticale, au dos de laquelle le Point Double & Singulier étoit ci-devant Conjugué; enſorte que le Syſtéme de la Courbe (*voy. fig.* 34.) ne repreſenteroit plus que deux Ovales, qui ſe couperoient en deux points ſitués ſur la Ligne des *x*, l'un à l'Origine même, & l'autre à la diſtance *b* de l'Origine; & ſi ne détruiſant point d'ailleurs le changemẽt que nous venons de faire en dernier lieu, on ſuppoſoit outre cela

égale à zero la lettre *b* qui representoit dans la Courbe de M. de B. le Paramêtre ou la hauteur de la Bezace dont nous avons parlé, en ce dernier cas nous ne verrions point non plus paroître un Point Conjugué de la seconde Espéce à la place de cette Bezace, mais le Systéme de la Courbe seroit uniquement composé (*voy. fig.* 35.) de deux Ovales qui se baiseroient dans l'Origine, & dans la Direction des *x*.

3°. On pourroit encore reprocher à M. de B. de n'avoir point donné des subdivisions *adequates* des Espéces de Points Triples que nous avons rangés dans la troisiéme, & dans la quatriéme classe. En effet il ne fait entrer dans la 1re de ces deux Classes que le Rebroussement traversé par une Branche d'une direction differente de la sienne propre, & il ne place dans la seconde que le seul Lem-

nisceros infiniment petit. Or nous avons remarqué qu'outre ces deux Points Singuliers, il en étoit encore d'autres qui devoient être mis au nombre des Points Triples à deux, ou à trois directions coincidentes, c'est-à-dire, de la troisiéme, ou de la quatriéme Espéce.

Que si, pour justifier les divisions de cet Académicien, on alléguoit qu'il n'a eu en vûe de faire l'Enumération que de ceux des Points Triples qui peuvent appartenir aux Lignes du quatriéme Ordre, cette réponse ne paroîtroit point satisfaisante.

Car 1°. lorsqu'il traite du Point Triple qui peut se former par l'intersection de trois Branches à directions differentes, il examine les cas dans lesquels une, ou deux de ces Branches, ou même toutes les trois à la fois subiroient dans le Point Triple une Inflexion d'un Ordre plus ou moins élevé. Or

ces

ces cas ne pouvant non plus avoir lieu dans les Lignes du quatriéme Ordre, il s'ensuit que l'Auteur n'a point prétendu se borner à faire seulement l'Enumeration des Points Singuliers dont cet Ordre de Lignes étoit susceptible.

En second lieu, si son intention eut été telle, il seroit surprenant qu'il ne l'eût point annoncé, & qu'il se fût au contraire servi, comme il l'a fait, de termes propres à faire attendre à ses Lecteurs des divisions applicables, au moins par induction, à tous les Ordres des Lignes.

Une raison semblable fait aussi qu'on voit avec étonnement paroître dans le troisiéme Mémoire de cet Auteur les Osculations, les prétenduës Lemniscates infiniment petites Conjuguées, & les Lemnisceros infiniment petits, dont il n'avoit fait aucune mention dans les divisions qu'il pa-

roissoit avoir données pour exactes aux Articles, 12, 13, 21, 23, 52, 54, de son premier Memoire, & dans le préambule du second. Il dit à la vérité au commencement du troisiéme Mémoire qu'il s'est abstenu jusques-là de parler des Osculations, & des prétenduës Lemniscates infiniment petites Conjuguées, soit parce que les Mémoires précédents seroient devenus trop longs s'il avoit voulu tenir une conduite differente, soit à cause que ces deux Espéces de Points Doubles ne pouvoient avoir lieu dans les Lignes du second & du troisiéme Ordre : mais ces excuses ne paroissent pas non plus suffisantes, & nos objections reviennent ici avec la même force. D'ailleurs quant au Lemnisceros infiniment petit, il n'est point vrai, ainsi qu'on l'a vû, *pag.* 87, que pour le concevoir il soit nécessaire de s'être

convaincu précédemment que les Lignes ausquelles il peut appartenir puissent être chargées à la fois de trois Points Doubles differens: cependant M. de B. avouë au commencement de son troisiéme Mémoire que ce n'est que sur une pareille supposition qu'il a differé jusqu'alors de parler de ce Point: c'est donc mal-à-propos qu'il l'a omis dans les divisions antérieures, où il n'a pas même laissé lieu de se douter que dans la suite on en découvriroit la possibilité.



COROLLAIRE TROISIEME.

Par lequel on connoîtra quelles Inflexions, ou quels Serpentemens infiniment petits, peuvent subir, dans le Point qui leur est commun, les differentes Branches réelles, ou imaginaires, dont peut être composé un Point Multiple proposé & situé dans l'Origine ; soit que les directions de ces Branches, lorsqu'elles seront réelles, ne doivent point être coincidentes, ou même qu'elles doivent l'être.

Toutes les Suppositions du Corollaire précédent ayant encore lieu dans celui-ci, si l'on suppose de plus qu'une des Racines tirées du $\overline{s+1}^{ieme}$ Rang reduit en Equation n'ait point dans ce Rang d'autres Racines qui lui soient égales, qu'elle soit aussi Racine du $\overline{s+2}^{iéme}$ Rang réduit de même en Equation, &

que néanmoins elle ne le soit pas du $\overline{s+3}$ iéme, il s'ensuivra, ainsi qu'il est aisé de l'appercevoir en conséquence de ce qui a été dit à la fin de la *pag.* 65, *pag.* 90, & suivantes, que la Branche dont cette Racine peut faire connoître la Tangente subira une Inflexion dans l'Origine; & cette Infléxion se changeroit en un Serpentement infiniment petit, si la Racine en question divisoit aussi le $\overline{s+3}$ iéme Rang, sans diviser de même le $\overline{s+4}$ iéme. Enfin, l'Infléxion ou le Serpentement seroient d'un Ordre plus ou moins élevé, selon que cette Racine diviseroit un plus ou moins grand nombre impair, ou pair de Rangs Horizontaux consécutifs; d'où on peut conclure que pour connoître, par exemple, les conditions qui peuvent rendre de telle ou telle forme un Point Double d'Inter-

ſection ſitué dans l'Origine, il ne faut que chercher celles qui peuvent rendre vraies à la fois les Equations que donneroient le troiſiéme & le quatriéme, le troiſiéme le quatriéme & le cinquiéme Rangs Horizontaux de de la Propoſée. . . &c; & on pourra en venir à bout, ainſi qu'on l'a dit à la fin de la *page* 55, en ſe ſervant des Formules que M. Newton a données pour cela dans ſon Arithmetique Univerſelle, ou encore en diviſant chacun des Rangs ſupérieurs Ordonnés par raport à la Fraction $\frac{y}{x}$ par le troiſiéme, & enſuite le Diviſeur de ces Diviſions par leurs Reſtes, puis les premiers Reſtes par les ſeconds, & ainſi de Reſtes en Reſtes, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à en trouver qui ne contiennent plus le Rapport indéterminé de x à y, ou de n à m.

Le quatriéme Rang Horizon-

nal étant, par exemple, ($hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3$), & le troisiéme ($ey^2 + fxy + gx^2$), on pourra prouver aisément que ce troisiéme Rang réduit en Equation representera lui-même la condition qui donneroit un Infléxion à l'une des Branches qui se coupent, si l'on suppose que les lettres x & y y ayent pour valeur les deux Polinomes ($ke^2 - hge - ife + hf$), & ($-le^2 + ige - hgf$), qui sont précisément les Coefficiens des deux Termes du Reste de la Division que nous avons indiquée, les Signes du second ayant seulement été changés de + en —, & de — en +.

En effet, si on tiroit la Racine de cette Equation faite du troisiéme Rang, & qu'on y substituât les valeurs que nous venons d'assigner pour x & pour y, cette Racine prendroit la forme de celle qui résulteroit du dernier

Terme de la Formule assignée par M. de B. (*Art.* 94), si ce dernier Terme étoit seul égalé à zero. Or il est à propos de remarquer à cette occasion que le premier des deux Termes donnés par cet Auteur, lequel contient 18 membres chacun de cinq Dimensions, ne pouvoit être dans le quatriéme Ordre des Lignes d'aucune utilité, puisque la condition qu'il désigne est celle qui jointe à l'autre dont nous venons de parler donneroit, non-seulement une Infléxion, mais même un Serpentement infiniment petit à l'une des Branches du Nœud, proprieté dont les Lignes ne commencent à devenir susceptibles que dans le cinquiéme Ordre, & que d'ailleurs M. de B. n'avoit point dit être indiquée par l'Equation que peut fournir le premier Terme de sa Formule égalé seul à zero.

De

De ce que nous venons de dire il est très-facile de conclure que si deux, trois, quatre, en un mot plusieurs Racines du $\overline{s+1}^{\text{ième}}$ Rang se trouvoient à la fois dans les mêmes conditions que celle que nous venons d'examiner, il y auroit dans l'Intersection proposée autant de Branches qui subiroient à la fois des Infléxions ou des Serpentemens infiniment petits d'Ordres plus ou moins élevés.

Et par Analogie, on en conclura encore que si deux Racines imaginaires du $\overline{s+1}^{\text{iéme}}$ Rang Horizontal sont aussi Racines du $\overline{s+1}^{\text{iéme}}$, du $\overline{s+1}^{\text{ième}}$ & du $\overline{s+3}^{\text{iéme}}$ ...&c, le Point Conjugué de la premiere Espéce que ces deux Racines imaginaires désigneront, devra être chargé de deux Infléxions, ou Serpentemens infiniment petits, qui pourront en

quelque sorte être dits imaginaires, puisque leur direction sera telle. Ce sont aussi ces espéces de Points, oubliés encore par M. l'Abbé de Bragelongne, bien que le premier d'entr'eux pût avoir lieu dans les Lignes du quatriéme Ordre, ce sont, dis-je, aussi ces Points que nous appellerons Inflexions ou Serpentemens infiniment petits imaginaires de la premiere Espéce, pour les distinguer de ceux dont les distances à l'Origine devroient être imaginaires, & dont nous aurons plus bas occasion de considerer la nature, soit que leurs directions doivent, ou ne doivent pas être pareillement imaginaires.

Que si la Racine du $\overline{s+1}^{\text{iéme}}$ Rang, qui doit diviser de plus les Rangs supérieurs, en avoit d'autres qui lui fussent égales dans ce même $\overline{s+1}^{\text{iéme}}$ Rang, alors se-

lon qu'il y en auroit de même plus ou moins dans les Rangs supérieurs qui lui seroient aussi égales, ou qu'il n'y en auroit point du tout, on verroit naître une variété prodigieuse de Points Multiples à plusieurs directions coincidentes, & dans l'Origine desquels on pourroit supposer diverses Infléxions, ou divers Serpentemens infiniment petits.

Or il est d'abord évident qu'on parviendroit facilement à connoître la nature, la figure, & les différences de tous ces Points Multiples & Singuliers, si ayant transformé l'Equation proposée de façon que la Transformée convînt sans aucun changement d'Axe à des Ordonnées parallèles aux directions coincidentes du Point à examiner, on cherchoit premierement par la fameuse Régle du Parallelograme de M. Newton, de quels mem-

bres de cette Transformée devroient ſe former ou l'unique Equation, ou les differentes Equations particulieres qui ſeroient propres à faire connoître la valeur de l'Ordonnée primitive, c'eſt-à-dire, de celle qui correſpondroit à une Abſciſſe nulle, & qu'enſuite on appliquât à cette unique Equation, ou à ces différentes Equations particulieres les Régles qui ont été démontrées ci-deſſus (*pag.* 77, 78, 79, 80.)

Mais comme nous n'avons point encore enſeigné la maniere abregée de faire la transformation dont nous venons de parler, il pourroit paroître en conſéquence que nous devrions renvoyer plus loin un pareil examen.

Cependant on ſe convaincra du contraire, ſi l'on remarque que pour faire ici l'application de la Régle de M. Newton, il ſuffit de pouvoir diſcerner quels ſeront

ceux des membres inférieurs vers la Gauche qui devront manquer dans les Rangs différents de la Transformée. Or cette connoiſſance ne demande point qu'on ait précédemment transformé la Propoſée.

En effet, puiſque la Transformée & la Propoſée doivent convenir à la même Courbe, & déſigner dans la naiſſance de leur Abſciſſe un même Point Singulier, il s'enſuit que ſi un certain Rang de la Propoſée a pour Diviſeur Simple, Double, Triple, &c.... la Racine qui exprime la valeur du Rapport $\frac{x}{y}$ convenable au Point Singulier, le Rang qui ſera de même nom dans la Transformée devra ſe diviſer une fois, deux fois, trois fois, &c... par $\frac{t}{u}-0$, c'eſt-à-dire, qu'il devra manquer à ce Rang dans la Transformée le premier, les deux premiers, les trois premiers, &c... de ſes mem-

bres vers la Gauche. Voilà donc des moyens pour connoître sans le secours de la Transformation quels membres vers la Gauche doivent manquer dans les Rangs différens de la Transformée, & par conséquent de quelle Espece doit être le Point Singulier situé dans l'Origine.

Or mettant ces moyens en usage, on découvrira les Régles suivantes pour les Points Doubles, Triples, & Quadruples à plusieurs directions coincidentes, qui peuvent se rencontrer jusques dans le cinquiéme Ordre des Lignes inclusivement, & qui sont les seuls que nous nous proposons ici d'examiner, de peur de tomber dans une trop grande prolixité.

Premierement supposant que l'Origine soit dans un Point Double, & à deux directions coincidentes, ce qui fera manquer dans l'Equation de la Courbe les deux

premiers de ces Rangs Horizontaux inferieurs, & rendra égales les deux Racines de l'Equation qu'on pourroit faire du troisiéme Rang, si l'on veut de plus que la Racine Double du troisiéme Rang ne divise point le quatriéme, le Point Singulier ne pourra être en ce cas qu'un Rebroussement ordinaire.

Et comme les deux premiers Rangs manquant dans une Equation du troisiéme Degré, le troisiéme & le quatriéme Rang ne sçauroient avoir un Diviseur commun, sans que l'Equation se réduise à avoir pour Lieu ou le Systême d'une Droite & d'une Section Conique, ou bien même (si le Diviseur commun est à la fois Diviseur Double du troisiéme & du quatriéme Rang) le Systême de trois Droites, cela fait qu'il n'est entre les Points Doubles à directions coincidentes que le

ſeul Rebrouſſement ordinaire qui puiſſe avoir lieu dans les Lignes du troiſiéme Ordre.

Mais ſi toutes choſes reſtant d'ailleurs les mêmes, la Racine Double du troiſiéme Rang étoit auſſi Racine du quatriéme Rang, ſans que néanmoins elle le fût pareillement du cinquiéme, en ce cas le Point Singulier ſeroit une Oſculation de deux Sommets de Paraboles Coniques à Paramétres ou réels, ou imaginaires ; & ſi de plus le Diviſeur Double du troiſiéme Rang étoit auſſi Diviſeur Double du quatriéme, les Paramétres de l'Oſculation devroient néceſſairement alors être égaux de quantité & de Signe différent. Or on a vû plus haut que cette derniere propriété marquoit une Eſpece particuliere d'Oſculation proprement dite.

Et comme l'Equation étant du quatriéme Ordre, & les deux

premiers Rangs y manquant, le troiſiéme, le quatriéme, & le cinquiéme ne pourroient y avoir à la fois un Diviſeur commun, ſans qu'elle ſe réduisît à avoir pour Lieu le Syſtême de deux ou plusieurs Lignes d'Ordres inférieurs au quatriéme, il s'enſuit qu'entre les différents Points Doubles à directions coincidentes, il n'eſt que le Rebrouſſement ordinaire avec les Oſculations des Sommets de Paraboles Coniques à Paramétres ou réels, ou imaginaires, qui puiſſent ſe rencontrer dans le quatriéme Ordre des Lignes.

Si enfin la Racine Double du troiſiéme Rang diviſoit auſſi à la fois le quatriéme & le cinquiéme, alors ſelon qu'elle ſeroit ou Diviſeur Simple, ou Diviſeur Double du quatriéme Rang, le Point Singulier repreſenteroit ou bien l'Oſculation des Sommets d'une Parabole Cubique & d'une Para-

bole Conique (*voy. fig.* 27, 28), ou bien un Rebrouſſement que nous appellerons du ſecond Ordre, parce que ſemblable de figure au Rebrouſſement ordinaire, il pourra de plus être cenſé renfermer deux Infléxions dans ſon *Folium* Evanouiſſant.

Sur quoi on remarquera en paſſant qu'il répugneroit de ſuppoſer imaginaires les Paramétres des Sommets de la Parabole Cubique & de la Parabole Conique, qui formeroient l'Oſculation que nous venons de décrire en dernier lieu, à la différence de ce qui arrive dans les Oſculations dont il avoit été queſtion précédemment.

De plus on ſe convaincra par des raiſons analogues à celles qui ont été rapportées ci-deſſus pour le troiſiéme & le quatriéme Ordre des Lignes, que les ſeuls Points Doubles à directions coincidentes qui puiſſent ſe trouver

dans les Lignes du cinquiéme Ordre sont le Rebroussement du premier & du second Ordre, avec l'Osculation ou bien de deux Sommets de Paraboles Coniques, ou bien du Sommet d'une Parabole Cubique à Paramêtre réel, avec celui d'une Parabole Conique à Paramétre pareillement réel, ce qui fait en tout quatre Espéces; car nous rangeons ici dans une seule Espéce les trois différentes formes d'Osculations ordinaires, parce qu'elles sont données par un même cas d'Equation.

Mais si c'étoit dans un Point Triple qu'on eût supposé l'Origine placée, & qu'on eût voulu d'abord que les trois directions de ce Point fussent à la fois coincidentes, ce qui auroit fait manquer les trois premiers Rangs Horizontaux de la Proposée, & auroit rendu égales les trois Racines

de l'Equation particuliere qu'on auroit pû faire de ſon quatriéme Rang, en ce cas ſi la Racine Triple du quatriéme Rang n'eût point diviſé le cinquiéme, le Point Singulier n'auroit pû être qu'un Lemniſceros infiniment petit.

Et ce Point, ainſi que nous l'avons avancé plus haut, eſt le ſeul Point Triple à trois directions coincidentes dont ſoient ſuſceptibles les Lignes du quatriéme Ordre; en effet dans cet Ordre de Lignes, les trois premiers Rangs manquant à l'Equation, on ne ſçauroit ſuppoſer un Diviſeur commun au quatriéme & au cinquiémeRang, puiſqu'une telle condition rendroit l'Equation diviſible en entier par ce Diviſeur, & par conſéquent l'abaiſſeroit a des Degrés inférieurs au quatriéme.

Si au contraire la Racine Tri-

ple du quatriéme Rang Horizontal eût pareillement divisé le cinquiéme, en ce dernier cas, selon que cette Racine auroit été Diviseur Simple, ou Diviseur Double du cinquiéme Rang, le Point Singulier auroit representé ou l'Osculation des Sommets d'une Parabole Conique, & d'une Parabole seconde Cubique, l'une & l'autre à Paramêtres nécessairement réels (*voy. fig.* 31), ou bien un Lemnisceros infiniment petit compliqué d'Inflexion, & semblable de figure aux Points d'Inflexion ordinaires.

Et ces deux Points joints au Lemnisceros infiniment petit ordinaire, forment les trois seules Especes de Points Triples à trois directions coincidentes, qui puissent avoir lieu dans les Lignes du cinquiéme Ordre.

Que si l'Origine étant toujours placée dans un Point Triple, &

biroit point, ou qu'elle ſubiroit une Infléxion dans le Point Multiple, il arrive de-là que les Points Triples à deux directions coincidentes peuvent être de quatre Eſpéces différentes : on voit les formes des plus remarquables dans les *fig.* 22, 29, 30, 36, 37, 38 : quant aux deux eſpéces où l'Oſculation coupée deviendroit un Point Conjugué & Inviſible de la ſeconde Eſpéce, elles reſſemblent de figure aux Points Simples ordinaires & aux Points d'Infléxion.

Si enfin l'Origine d'une Ligne du cinquiéme Ordre étoit placée dans un Point Quadruple, & qu'on ſuppoſât d'abord coincidentes ſes quatre directions à la fois, ce qui feroit manquer dans l'Equation de cette Ligne les quatre premiers de ſes Rangs Horizontaux inférieurs, & rendroit égales les quatre Racines

de

de l'Equation particuliere qu'on pourroit faire du cinquiéme Rang, sans que néanmoins la Racine Quadruple de ce Rang pût aussi être Racine du sixiéme, alors le Point Singulier representeroit une nouvelle Espéce de Rebroussement bien différente non seulement du Rebroussement ordinaire, mais encore de celui que nous avons décrit à la *Page* 130, & qui n'étoit qu'un Point Double, au lieu que celui-ci est un Point Quadruple.

Que si l'Equation particuliere faite du cinquiéme Rang n'eût eu que trois Racines égales, & que le Point Singulier n'eût dû en conséquence avoir que trois directions coincidentes, ce Point n'auroit pû en ce cas être formé que par l'Intersection d'un Lemniscéros infiniment petit ordinaire, avec une Branche de Courbe ordinaire, ou sans Inflé-

xion, ce qui l'auroit rendu semblable de figure aux Nœuds, ou Points de Croix, ou d'Intersection ordinaires.

Mais si les quatre Racines de l'Equation faite du cinquiéme Rang étant égales deux à deux, les quatre directions du Point Singulier eussent été conséquemment coincidentes deux à deux; c'est-à-dire, que la direction de la premiere Branche l'eût été avec celle de la seconde, & celle de la troisiéme avec celle de la quatriéme, sans que cependant toutes les quatre le fussent ensemble, & à la fois, ce cas qui est susceptible d'Infléxions imaginaires, se seroit subdivisé même dans le cinquiéme Ordre des Lignes en deux Espéces différentes.

La premiere, c'est-à-dire, celle dont les directions auroient été imaginaires, se seroit formée par la Superposition d'un Point Con-

jugué de la premiere Eſpéce ſur un autre entierement ſemblable au premier, ou dans les mêmes conditions que lui, & elle auroit repreſenté un Point Quadruple Conjugué & Inviſible.

La ſeconde dont les directions auroient été au contraire réelles, n'auroit pû ſe former dans les Lignes du cinquiéme Ordre que par la Juxtapoſition de deux Points de Rebrouſſement ordinaires (*voy. fig.* 39.).

Si enfin l'Equation faite du cinquiéme Rang, n'eût eu abſolument que deux Racines égales, ou ſi les directions de deux Branches du Point en queſtion étant coincidentes l'une avec l'autre, celles des deux autres Branches ne l'euſſent été ni entr'elles ni avec celles des deux premieres, alors ſelon que les directions non coincidentes auroient été ou imaginaires, ou réelles, le Point Qua-

druple & Singulier auroit représenté ou l'adhérence d'un Point Conjugué de la premiere Espéce sur un Point de Rebroussement ordinaire, ou la Juxtaposition d'un Rebroussement & d'un Point de Croix ordinaires ; la forme de la premiere Espéce auroit en conséquence été semblable à celle d'un Rebroussement, au lieu que celle de la seconde auroit été telle qu'on la voit à la *Fig*. 40.

Joignant maintenant aux six Espéces de Points Quadruples que nous venons de décrire en dernier lieu les quatre Espéces de Points Doubles, & les sept Espéces de Points Triples que nous avions décrites précédemment, on pourra généralement conclure qu'il peut se rencontrer dans les cinq premiers Ordres des Lignes dix-sept Espéces différentes de Points Multiples dont ou toutes les directions, ou quelques directions seulement

ſoient coincidentes les unes avec les autres, & de ces dix-ſept Eſpéces il n'en eſt que quatre qui puiſſent avoir lieu dans les Lignes du quatriéme Ordre, & une ſeulement qui puiſſe ſe trouver dans celles du troiſiéme.

Quant aux Points Simples, & aux Points Multiples dont les différentes Branches réelles, ou imaginaires ne ſçauroient avoir des directions coincidentes les unes avec les autres, pour parvenir ſemblablement par la conſideration des Diviſeurs des Rangs différens des Equations à une Enumération générale de ceux qui peuvent avoir lieu dans les cinq premiers Ordres des Lignes, il ſuffiroit de faire ſur les Equations generales des cinq premiers Ordres (l'Origine étant ſucceſſivement placée dans un Point Simple, Double, Triple, & Quadruple) l'application détaillée & ſui-

vie des Principes qui ont été établis au commencement de ce Lemme, & on trouveroit qu'il peut en effet se rencontrer dans ces cinq Ordres

1°. Quatre Espéces de Points Simples, sçavoir les Points Ordinaires, les Infléxions & les Serpentemens infiniment petits ordinaires, & les Infléxions de la seconde Espéce.

2°. Six Espéces de Points Doubles d'Intersection, entre lesquelles trois sont representées par la *Fig.* 23, deux par la *Fig.* 41, & une enfin par la *Fig.* 42.

3°. Quatre Espéces de Points Triples d'Intersection representées par les *Fig.* 16, 43, 44, 45, 46.

4°. Une seule Espéce de Point Quadruple d'Intersection, dont la forme est une de celles qu'on voit à la *Fig.* 47.

5°. Trois Espéces de Points Doubles Conjugués & Invisibles, dont la seconde renfermeroit

deux Infléxions, & la troisiéme deux Serpentemens infiniment petits imaginaires, selon qu'il a été expliqué à la *Pag.* 121.

6°. Deux Espéces de Points Triples, formés par l'adhérence d'un Point Double & Invisible sur une Branche ou ordinaire, ou à Infléxion, & par conséquent semblables de figure aux Points ordinaires, ou aux Points d'Infléxion.

7°. Une Espéce de Point Quadruple formée par la complication d'un Point Conjugué & d'un Point de Croix ordinaires, & semblable de figure aux Points de Croix ordinaires.

8°. Une Espéce de Point Quadruple Conjugué & Invisible, formé par la complication (sans coincidence de directions) de deux Points Doubles Conjugués.

9°. Enfin une autre Espéce de Point Quadruple Conjugué & In-

visible comme le précédent, mais qui ne sçauroit se décomposer en deux Points Doubles, parce que les Racines imaginaires qui indiqueroient ses directions, appartiendroient veritablement à une Equation du quatriéme Dégré, & non à deux Equations du second.

Et des vingt-trois Espéces que nous venons de compter en dernier lieu, n'y en ayant qu'une qui puisse appartenir aux Sections Coniques, n'y en ayant que quatre qui puissent avoir lieu dans les lignes du troisiéme Ordre, & n'y en ayant enfin que dix qui puissent se rencontrer dans celles du quatriéme Ordre, si l'on rappelle de plus ici l'Enumération que nous avons déja faite plus haut, on pourra en conséquence assurer généralement

1°. Qu'il ne peut se trouver que d'une Espéce de Points

dans

dans les Sections Coniques.

2°. Qu'il peut s'en trouver en tout dans les Lignes du troisiéme Ordre de cinq Especes différentes.

3°. Que dans celles du quatriéme Ordre il peut s'en trouver de quatorze Especes.

4°. Enfin que les Lignes du cinquiéme Ordre peuvent en renfermer de quarante Espéces.

Or après une pareille Enumeration il ne paroît plus pouvoir rester que deux choses à désirer sur cette matiere.

La premiere que nous indiquions des moyens, ou des Simptômes d'Equations propres à faire distinguer les unes des autres les Osculations de Sommets Paraboliques à Paramétres réels, ou imaginaires, de même Signe, ou de Signe différent ; ou encore les deux formes de Points Triples d'Intersection qu'on voit aux

Fig. 16, & 43; les deux formes de Point Quadruple d'Interſection qu'on voit à la *Fig.* 47... &c; mais comme cela demanderoit que nous euſſions en effet transformé la Propoſée de la façon dont il a été parlé ci-deſſus (*voy. Pag.* 123.) nous différerons par cette raiſon de traiter ce ſujet, juſqu'à ce que nous ayons enſeigné une maniere abregée de parvenir, à l'aide des differentiations, à la Transformation en queſtion.

La ſeconde choſe qui peut reſter à déſirer c'eſt que nous donnions, ainſi que nous le ferons bientôt, des Régles pour diſcerner dans les Eſpeces particulieres de Courbes qu'on peut propoſer par leurs Equations, par quelles ſuppoſitions tel ou tel des Points que nous avons décrits peut ſe placer en effet ou à l'Origine même, ce qui doit être aiſé à connoître, ou bien hors de l'O-

rigine, ce qui pourra paroître d'une recherche plus difficile, & en ce dernier cas pour assigner en quel endroit du Plan de ces Courbes ce Point cherché peut être situé.

Mais puisque c'est principalement sur les réfléxions que nous venons de faire que doivent être fondées les Méthodes générales que nous donnerons plus bas pour cet effet, on doit conséquemment voir dès à présent qu'il n'étoit point inutile de nous arrêter autant que nous l'avons fait sur la Théorie que nous venons de déveloper.



REMARQUE

Où l'on découvre une Analogie singuliere entre les différentes Espéces de Points, & les différentes Espéces de Branches Infinies Hiperboliques, ou Paraboliques, qui peuvent se rencontrer dans les Courbes.

De même que nous avons fait voir dans les Corollaires de ce Lemme que les manquemens des Rangs Horizontaux, & inférieurs d'une Equation désignoient que l'Origine de la Courbe dont elle étoit le Lieu se trouvoit placée dans un Point Multiple, que l'Equation particuliere qu'on pouvoit faire du Rang devenu le premier par le manquement des autres indiquoit par ses Racines les directions différentes de ce Point Multiple, que si cette Equation particuliere avoit des Racines ou

nulles, ou infinies, la premiere x, ou la premiere y feroient Tangentes dans l'Origine, que si elle en avoit de finies égales entr'elles, différentes directions du Point en question deviendroient coincidentes ; que si elle en avoit d'imaginaires, il manqueroit à ce Point quelques-unes des Branches, qui sans cela auroient dû le former...., &c ; de même aussi avions nous prouvé dans le Lemme premier que les manquemens des premiers Termes d'une Equation désignoient que les Ordonnées de la Courbe qui en étoit le Lieu étoient paralleles à la direction de différentes Branches Infinies, que l'Equation particuliere qu'on pouvoit faire du Coefficient du Terme devenu le premier par le manquement des autres indiquoit par ses Racines les distances de l'Origine aux Assymptotes de ces Branches, que

ſi cette Equation particuliere avoit des Racines ou nulles, ou infinies, les Aſſymptotes des Branches déſignées par ces Racines ou paſſeroient par l'Origine, ou ſeroient ſituées à une diſtance infinie de l'Origine, & dans ce dernier cas ces Branches deviendroient Paraboliques, que ſi elle en avoit d'égales entr'elles, on verroit naître des Aſſymptotes Multiples, que ſi enfin elle en avoit d'imaginaires, les Branches déſignées par ces dernieres Racines ſeroient ſituées à une diſtance imaginaire de l'Origine, & par conſéquent n'exiſteroient point, bien qu'on pût dire que, ſi elles exiſtoient, leur derniere direction ſeroit ſemblable à celle des Ordonnées.

Or pour connoître dans une plus grande étenduë cette Analogie, dont nous donnerons plus bas la raiſon *à priori*, il importe encore d'obſerver quelle variation peut pro-

duire dans les Branches Infinies la condition qu'une ou plusieurs Racines de l'Equation particuliere faite du Coefficient du Terme devenu le premier par le manquement des autres soit commune à quelques-unes des Equations qu'on pourroit former semblablement des Coefficiens des Termes immédiatement suivans ; & quoiqu'il soit absolument possible de le découvrir par les Principes mêmes que nous avons établis dans le Lemme premier, cependant nous nous sommes abstenus de l'enseigner dans ce Lemme, parce que cette recherche devoit devenir beaucoup plus facile, si on y employoit, de la maniere dont nous l'avons employée depuis, la fameuse Régle du Parallelogramme de M. Newton, de laquelle nous n'avions point encore parlé alors.

A présent donc qu'on doit être

versé dans les usages ausquels nous avons fait servir cette Régle, qu'on remarque d'abord quels membres inferieurs devroient manquer aux Termes de la Transformée dans laquelle la grandeur seule de l'Abscisse seroit augmentée ou diminuée d'une quantité propre à porter successivement l'Origine dans chacune des Assymptotes, ou successivement égale à chacune des Racines de l'Equation particuliere faite du premier Terme de la Proposée, ce qui peut se connoître (en conséquence de ce qui a été dit ci-dessus *Pag.* 125.) sans qu'on ait en effet transformé précédemment la Proposée.

Qu'on applique ensuite ici la Régle de M. Newton, dont nous venons de parler, & on pourra conclure généralement que faisant sur les premiers Termes d'une Equation proposée précisé-

sément les mêmes suppositions que nous avons faites successivement dans les Corollaires précédens sur ses Rangs Horizontaux inférieurs, il devra paroître dans la Courbe qui sera le Lieu de cette Equation

1°. Au lieu des Points Multiples qui s'étoient présentés tout-à-l'heure, des Systêmes de differentes Branches Infinies, dont les dernieres directions seront semblables à celle des Ordonnées.

2°. Au lieu de la coincidence de la premiere direction d'une des Branches qui formeroient le Point Multiple avec la premiere x, ou la premiere y, le passage d'une Assymptote par l'Origine, ou son transport dans l'infini, c'est-a-dire, des Branches Paraboliques, & non pas Hyperboliques.

3°. Au lieu de la coïncidence des premieres directions de deux

ou plusieurs Branches du Point Multiple, une Assymptote Double ou Multiple.

4°. Au lieu des Points Conjugués de la premiere Espéce, & de tous les autres à directions imaginaires, des Assymptotes situées à des distances imaginaires de l'Origine, & des Branches, pour ainsi dire, imaginaires.

5°. Au lieu des Points Conjugués de la seconde Espéce, & de tous les autres semblables, quatre Branches, pour ainsi dire, *Evanouissantes* aux côtés de deux Assymptotes coincidentes & qui se réuniront en une Double.

6°. Au lieu des Points ordinaires, au lieu des Serpentemens infiniment petits, & des Lemnisceros infiniment petits... &c (pourvû néanmoins que leur direction ne dût pas être coincidente avec la premiere *y*), des Branches Hyperboliques semblables de figure à

celles de l'Hyperbole Conique (*voy. Fig.* 7.), mais d'un Ordre d'Hyberbolisme plus ou moins élevé.

Ou si la direction de ces Points devoit être coincidente avec la premiere *y*, des Branches Paraboliques semblables de figure à celles de la Parabole Conique, mais d'un Ordre de Parabolisme plus ou moins élevé (*voy. Fig.* 11.).

7°. Au lieu des Points d'Infléxions de tous les Ordres, dont les directions ne devroient pas être coincidentes avec la premiere *y*, des Branches Hyperboliques semblables à celles qui vont en sens contraire dans l'Hyperbole Cubique (*voy. Fig.* 8.), mais d'un Hyperbolisme plus ou moins élevé.

Ou si la direction de l'Infléxion devoit être coïncidente avec la premiere *y*, des Branches Paraboques semblables de figure à celles

de la Parabole seconde Cubique (*voy. Fig.* 10.), & d'un Parabolisme plus ou moins élevé.

8°. Au lieu des Points de Rebroussement de toutes les Espéces (pourvû qu'ils ne dussent point avoir la premiere *y* pour Tangente), des Branches Hyperboliques semblables de figure à celles qui vont en même sens dans l'Hyperbole Cubique (*voy. Fig.* 8.), & toujours d'un Ordre d'Hyperbolisme plus ou moins haut.

Et de même si la premiere *y* devoit être Tangente du Rebroussement, des Branches Paraboliques semblables de figure à celles de la premiere Parabole Cubique (*voy. Fig.* 9), mais d'un Parabolisme dont l'Ordre pourroit être plus élevé que celui de cette Parabole.

Or sur ces trois derniers cas on remarquera que, si le Point ordinaire ou d'Infléxion ou de Serpentement, au lieu d'être Sim-

ples étoient Multiples, & de même si le Rebroussement étoit Point Quadruple...&c, au lieu d'être simplement Point Double, alors les Assymptotes seroient aussi Multiples à proportion, & aux côtés de chaque Paire d'Assymptotes qui se réuniroient en une seule, on pourroit concevoir quatre Branches, pour ainsi dire, *Evanouissantes* de la façon qu'il a été dit au cinquiéme cas de cette Enumération.

Et on observera semblablement que, si l'Infléxion, le Serpentement, ou le Rebroussement avoient des directions imaginaires, les Branches qui répondroient à ces cas dont il a été parlé (*Pag.* 122.) quoiqu'imaginaires, & par conséquent non existentes, pourroient cependant être censées situées de telle façon, plutôt que de telle autre, par raport à leur Assymptote.

9°. Enfin à la place de tout

Point formé par la complication de plusieurs des Espéces déja décrites, il naîtra un Systême de plusieurs Branches Hyperboliques, ou Paraboliques, dont toutes les dernieres directions seront à la fois paralleles aux y, & qui deux à deux seront semblables de figure à quelqu'une des Espéces dont nous venons de faire l'Enumération.

Or de cette Analogie il suit d'abord sans autre démonstration que les Systêmes de Branches Hyperboliques à Assymptotes paralleles peuvent être d'autant d'Espéces qu'on peut distinguer d'Espéces de Points Singuliers. Il n'y en peut donc avoir (*voy. ce qui a été dit Pag.* 144.) que d'une Espéce dans les Sections Coniques, que de cinq Espéces dans les Lignes du troisiéme Ordre, de quatorze dans celles du quatriéme, & de quarante dans celles du cinquiéme.

De plus dans chacune de ces Eſpéces on peut ſuppoſer des Branches Hyperboliques transformées en Paraboliques correſpondantes, en nombre égal à celui qui marque combien le Point Multiple analogue au Syſtême de l'Eſpéce propoſée peut avoir de directions réelles coincidentes : mais les directions imaginaires d'un Point Multiple ne peuvent correſpondre à un cas de Paraboliſme, parce qu'on ne ſçauroit ſuppoſer qu'elles ayent la premiere *y* pour Tangente.

Quant au détail des figures qui conviendroient à chacune des Eſpéces, ou à chacun des Syſtêmes que nous venons d'indiquer, nous croyons à propos de le renvoyer au Corollaire ſuivant, qui contiendra des Régles d'un uſage plus fréquent que les précédentes, & ſur leſquelles par cette raiſon nous nous étendrons davantage.

COROLLAIRE QUATRIE'ME.

Où l'on donne des moyens pour connoître par l'inspection des plus hauts Rangs Horizontaux d'une Equation si la Courbe, qui en est le Lieu, doit avoir des Branches Infinies, si ces Branches seront Hyperboliques ou Paraboliques, en quel nombre elles pourront se trouver, quelle devra être leur derniere direction, & supposant qu'elles soient Paraboliques, ou qu'étant au contraire Hyperboliques, leurs Assymptotes Rectilignes doivent passer par l'Origine, qu'elles pourront être en ces deux cas leurs Assymptotes Curvilignes.

Qu'on suppose toujours que les Inconnuës x & y de la Proposée representent les nombres indéterminés n & m, qui sont employés dans la Transformation de ce Lemme, & le plus haut Rang

Rang Parallele, ou Horizontal de la Proposée representera en conséquence le Coefficient de la plus haute Puissance de u dans la Transformée. Si donc on fait du plus haut Rang Horizontal de la Proposée une Equation particuliere, les valeurs de $\frac{x}{y}$, ou de $\frac{n}{m}$, qui résulteront de ses Racines, désigneront les situations d'Ordonnées qui seroient propres à faire manquer la plus haute Puissance de u dans les Transformées particulieres qui leur conviendroient, ou bien, conséquemment à ce qui a été dit dans le Lemme premier, les situations d'Ordonnées ausquelles seroient paralleles les dernieres directions de quelques Branches infinies, soit que la distance de l'Origine à l'Assymptote de ces Branches dût être réelle, & en ce cas finie, infinie, ou nulle, soit que ces Branches étant placées à une dis-

tance imaginaire de l'Origine, elles devinssent aussi elles-mêmes en quelque sorte imaginaires, selon ce qui a été observé ci-dessus (*voy. Pag.* 38).

Et comme l'Equation particuliere faite du plus haut Rang de la Proposée peut avoir des Racines imaginaires, nous remarquerons en conséquence qu'une nouvelle cause qui peut faire disparoître les Branches Infinies des Courbes c'est que la direction des Assymptotes de ces Branches devienne imaginaire, & à plus forte raison disparoîtront-elles lorsque la direction de l'Assymptote, & sa distance de l'Origine devront être à la fois imaginaires.

Que si l'une des Racines faite du plus haut Rang Horizontal étoit commune à l'Equation qu'on peut faire de la même maniere du second Rang en descendant, il manqueroit dans ce cas à la

Transformée convenable à cette Racine non ſeulement ſon premier Terme, mais encore la partie toute connuë du Coefficient du ſecond.

Et ſi au lieu de cela on ſuppoſoit que le plus haut Rang Horizontal de la Propoſée dût avoir deux Racines égales, en ce cas on concluroit de ce qui a été dit ci-deſſus (*voy. Pag.* 121, 122.) qu'il devroit manquer au plus haut Rang Horizontal de la Transformée ſes deux premiers membres vers la Gauche.

Or le premier de ces deux cas ayant lieu ſans le ſecond, c'eſt-à-dire, le plus haut Rang de la Propoſée n'ayant que des Diviſeurs Simples, & l'un de ces Diviſeurs étant commun au ſecond Rang, il eſt facile, en conſéquence de ce qui a été dit dans le Lemme premier, d'appercevoir que la Courbe ne pourroit avoir alors

que des Branches Hyperboliques, & que l'Origine se trouveroit dans l'Assymptote de l'une de ces Branches.

De même l'Origine seroit à la fois dans plusieurs Assymptotes, si plusieurs Diviseurs Simples du plus haut Rang* Horizontal étoient à la fois communs au second Rang en descendant.

Et si un des Diviseurs du plus haut Rang, que nous supposons toujours Diviseur Simple de ce Rang, & commun aux deux plus hauts Rangs, si, dis-je, ce Diviseur étoit encore commun au troisiéme Rang en descendant, il manqueroit de plus à la Transformée la partie toute connuë du Coefficient de son troisiéme Terme devenu maintenant le second, puisque le premier qu'elle pourroit avoir est supposé y manquer. Or il suivroit de là, l'Equation étant par exemple du dé-

gré r, que l'Equation particuliere qui seroit propre à faire connoître la valeur de u dans la naissance de z, ou, ce qui est la même chose, l'Equation de l'Assymptote Curviligne de la Proposée deviendroit de cette forme ($zu^{r-1} + u^{r-3} = o$), qui se réduit à ($zu^2 + 1 = o$), au lieu que dans le cas précédent elle auroit été de cette autre forme ($zu^{r-1} + u^{r-2} = o$), qui se réduit à ($zu + 1 = o$); de façon que dans le premier de ces deux cas l'Assymptote Courbe devoit être une Hyperbole Conique, & les Branches devoient en conséquence ressembler à celles de la *Fig.* 7, & que dans celui-ci, où l'Assymptote Courbe est une Hyperbole Cubique, les Branches doivent être semblables aux deux Branches opposées de la *Fig.* 8.

Et en général on peut conclure de ceci combiné avec ce que

ou Conique (*voy. Fig.* 11.), ou bien à celles de la Parabole Seconde Cubique (*voy Fig.* 10.): mais leur Parabolisme, ou leur Assymptote Curviligne seroit d'un Degré d'autant plus élevé que l'Exposant de la Multiplicité du Sommet seroit un nombre plus grand, puisque, si l'on nomme ce nombre n, l'Equation de l'Assymptote Courbe devra toujours être de cette forme ($Au^{n-1} = z^n$).

Si enfin la Racine en question étoit à la fois Multiple dans le plus haut Rang Horizontal, & commune aux Rangs Horizontaux inferieurs, il pourroit naître de-là un nombre prodigieux de cas entre lesquels nous nous bornerons ici à parcourir ceux qui peuvent avoir lieu dans les cinq premiers Ordres des Lignes.

Premierement si cette Racine n'étoit que Racine Double dans le premier Rang, & qu'elle ne divisât

visât que les deux premiers Rangs, il y auroit dans la Courbe deux Assymptotes paralleles l'une à l'autre, dont aucune ne passeroit par l'Origine, & qui pourroient en être éloignées ou toutes deux à la fois d'une distance réelle, ou toutes deux à la fois d'une distance imaginaire.

Mais si la Racine que nous examinons n'étant toujours que Racine Double dans le premier Rang, elle divisoit à la fois les trois premiers Rangs, sans néanmoins diviser le quatriéme, alors selon qu'elle seroit Racine Simple, ou Double dans le second Rang, les deux Assymptotes ne seroient point, ou seroient coincidentes; de plus dans la premiere supposition l'Origine seroit placée dans l'une des deux Assymptotes, au lieu que dans la seconde elle le seroit dans l'Assymptote Double, c'est-à-dire, dans les deux

Aſſymptotes à la fois ; enfin dans le premier cas la Branche dont l'Aſſymptote droite paſſeroit par l'Origine auroit pour Aſſymptote Courbe une Hyperbole Conique, mais dans le ſecond l'Equation de l'Aſſymptote Courbe contiendroit les deux Termes $z^2 u^{r-2}$, u^{r-3}, de façon que cette Equation ſe réduiroit à cette forme ($z^2 u + 1 = 0$), & qu'elle auroit pour Lieu les deux Branches qui vont en même ſens dans l'Hyperbole Cubique de la *Fig.* 8.

Que ſi la Racine en queſtion diviſoit encore le quatriéme Rang, ſans cependant diviſer le cinquiéme, en ce cas ſi cette Racine n'étoit point Racine Double dans le ſecond Rang, les deux Aſſymptotes ne ſeroient point coïncidentes, & celle par où paſſeroit l'Origine auroit pour Aſſymptote Courbe les deux Branches qui vont de côté oppoſé l'une à l'autre dans

l'Hyperbole Cubique de la *Fig.* 8: mais si la Racine Double du plus haut Rang étoit aussi Racine Double dans le Rang immédiatement inferieur, en ce cas il passeroit par l'Origine une Assymptote Double, c'est-à-dire, deux Assymptotes coincidentes, & l'Equation de l'Assymptote Courbe comprendroit les termes $z^2 u^{r-2}$, $z u^{r-3}$, u^{r-4}. Or la multipliant par u^{-r+4}, elle se décomposeroit en deux Equations d'Hyperboles Coniques, dont les Puissances pourroient être ou réelles, ou imaginaires. Dans le premier cas si les Puissances étoient outre cela de même Signe, les quatre Branches rampantes à une même Assymptote prendroient la forme de celles de la *Fig.* 48, au lieu que si les Puissances étoient de Signe différent, ces Branches ressembleroient à celles de la *Fig.* 49: mais dans le second cas, où les Puissances de-

vroient être imaginaires, les quatre Branches disparoîtroient à la fois, bien que leur Assymptote, ou plutôt la ligne qui, si elles existoient, devroit être leur Assymptote fût toujours assignable, de même à peu près qu'on a vû dans le Point Conjugué de la seconde Espéce quatre Branches d'une Osculation disparoître, bien que la direction de l'Osculation pût en quelque sorte être déterminée; aussi cette Espéce est-elle la même dont nous avons déja parlé à la *Page* 154.

Si enfin la Racine en question divisoit à la fois les cinq plus hauts Rangs, alors ou elle seroit Racine Simple dans le second Rang, & les Branches seroient semblables de figure à celles de l'Hyperbole Conique, quoique d'un genre d'Hyperbolisme plus élevé, l'Equation de leur Assymptote Cour-

be devenant de cette forme ($zu^3+1=o$).

Ou bien cette Racine feroit Double dans le fecond Rang, & en ce cas, felon qu'elle feroit Simple, ou Double dans la troifiéme, l'Affymptote Courbe auroit ou les deux Equations ($zu+1=o$), & ($zu^2+1=o$) (*voy. Fig.* 50.), ou bien la feule Equation ($z^2u^3+1=o$), auquel cas fes Branches feroient femblables de figure à celles qui vont en même fens dans l'Hyperbole Cubique (*voy. Fig.* 8.), mais leur Hyperbolifme feroit d'un genre plus élevé.

Suppofant au contraire que la Racine que nous continuons à examiner ne pût divifer les Rangs inférieurs au fecond, mais qu'elle pût être plus que Double dans le premier, & même dans le fecond Rang, on verroit dès-lors naître des Branches Paraboliques de differentes fortes, conjuguées à deux Hyperboliques.

Et 1°. si la Racine étoit Simple dans le second Rang, selon qu'elle seroit Triple, Quadruple, ou Quintuple dans le premier, les Branches Paraboliques auroient en particulier pour Assymptote Courbe ou une Parabole Conique, ou une Parabole seconde Cubique (*v. Fig.* 10.), ou enfin une Parabole seconde Quarrée Quarrée, & dont la figure seroit encore semblable à celle de la Parabole ordinaire, ou Conique, l'Equation en étant de cette forme ($u^3 + z^4 = 0$).

Mais si cette Racine étoit Double dans le second Rang en descendant, alors ou elle ne seroit que Triple dans le premier, & en ce cas l'Equation de l'Assymptote Courbe seroit de cette forme ($u + z^1 = 0$), & l'Assymptote Courbe elle-même seroit une premiere Parabole Cubique (*voy. Fig.* 9.)

Ou bien cette Racine seroit Quadruple dans le premier Rang,

ſans cependant y être Quintuple, & pour lors l'Aſſymptote Courbe ſeroit compoſée de deux Paraboles Ordinaires, ou Coniques, dont les Paramêtres ſeroient ou réeſs, ou imaginaires.

Dans le premier de ces deux cas, ſelon que les Paramêtres ſeroient ou de même Signe, ou de Signe différent, ce ſeroit la *Fig.* 51, ou la *Fig.* 52 qui repréſenteroit l'Aſſymptote Courbe.

Dans le ſecond les quatre Branches Paraboliques diſparoîtroient, bien que leur derniere direction pût en quelque ſorte être aſſignée.

Si enfin la Racine en queſtion étoit Quintuple dans le plus haut Rang Horizontal, ſelon qu'elle ſeroit ou Double ſeulement, ou bien Triple dans le ſecond Rang, l'Aſſymptote Courbe auroit ou deux Equations de ces formes ($u+z^2=0$), & ($u^2+z^3=0$) (*Fig.* 53.), ou bien une ſeule E-

quation de celle-ci ($u^3+z^5=0$), auquel cas la figure de ses Branches seroit semblable á celle des Branches de la premiere Parabole Cubique (*voy. Fig.* 9.)

Que si la Racine dont nous parlons divisoit les trois premiers Rangs au moins, & étoit à la fois au moins Racine Triple dans le premier Rang, sans que cependant elle pût être Racine Double dans le second, en ce cas l'Assymptote Courbe seroit composée de deux Branches Hyperboliques, & de deux Paraboliques.

Et selon que cette Racine diviseroit ou les trois premiers, ou les quatre premiers, ou les cinq premiers Rangs à la fois, l'Assymptote Courbe particuliere aux Branches Hyperboliques auroit une Equation de l'une de ces trois formes ($zu+1=0$), ($zu^2+1=0$), ($zu^3+1=0$).

De même selon que la Racine

feroit Triple, Quadruple, ou Quintuple dans le plus haut Rang, l'Equation de l'Assymptote Courbe particuliere aux Branches Paraboliques prendroit une de ces trois formes ($u + z^2 = 0$), ($u^2 + z^3 = 0$), ($u^3 + z^4 = 0$).

Et les Combinaisons de ces deux Espéces de variations là produiroient neuf cas différens dont il feroit trop long de faire ici une Enumération particuliere. Nous y remarquerons seulement que de ces neuf cas il n'est que le premier qui puisse avoir lieu dans les Lignes du troisiéme Ordre. L'Espéce qui lui répond dans cet Ordre est celle que M. Newton a nommée le Trident, & qu'on connoît aussi sous le nom de Parabole de Descartes (*voy. Fig.* 54.)

Mais si la Racine en question étoit à la fois Triple au moins dans le premier Rang, Double au

moins dans le ſecond, & Simple au moins dans le troiſiéme, il paroîtroit alors pour ainſi dire un nouveau ſpectacle de Courbes, dans leſquelles trois Paires de Branches Infinies Hyperpoliques, ou Paraboliques, réelles, ou imaginaires auroient à la fois la même derniere direction.

Or pour faire l'Enumération de tous les cas qui peuvent être renfermés dans celui-ci, nous commencerons par remarquer que ſi l'on n'ajoûtoit rien aux ſuppoſitions que nous venons d'y faire, les trois Paires de Branches ſeroient Hyperboliques; de plus ſoit que leurs Aſſymptotes Droites fuſſent, ou ne fuſſent pas coincidentes, ces Aſſymptotes ne ſçauroient paſſer par l'Origine.

Mais ſi la Racine que nous examinons reſtant ſeulement Triple dans le premier Rang, & Double dans le ſecond, elle diviſoit de plus

non ſeulement le troiſiéme Rang, où elle ſeroit toujours Racine Simple, mais encore le quatriéme, ou même le quatriéme & le cinquiéme à la fois, l'Origine ne pourroit dès-lors manquer de ſe trouver dans une Aſſymptote Simple, & dans le premier de ces deux cas l'Aſſymptote Courbe de la Paire de Branches à laquelle cette Aſſymptote Droite appartiendroit ſeroit une Hyperbole Conique, au lieu que dans le ſecond l'Aſſymptote Courbe de cette Paire de Branches en particulier ſe formeroit des deux Branches oppoſées d'une Hyperbole Cubique.

Et ſi, les mêmes ſuppoſitions ayant d'ailleurs toujours lieu, on vouloit ſeulement de plus que la Racine en queſtion fût Racine Double dans le troiſiéme Rang, d'où naîtroit une Aſſymptote Double; alors ſelon qu'elle ne diviſeroit point, ou qu'elle diviſeroit

le cinquiéme Rang, l'Aſſymptote Courbe ſe formeroit ou des deux Branches qui vont en même ſens dans l'Hyperbole Cubique, ou du Syſtême de deux Hyperboles Coniques, à Puiſſances réelles, ou imaginaires ; & ces Puiſſances pourroient dans le premier cas être ou de même Signe, ou de Signe different, ainſi qu'il eſt arrivé déja dans le cas rapporté à la *Page* 171 (*voy. Fig.* 48, 49.).

Que ſi la Racine en queſtion étoit de plus Racine Triple même dans le ſecond Rang, ce qui feroit naître une Aſſymptote Triple, alors

1°. Si elle ne diviſoit pas le cinquiéme Rang, l'Aſſymptote Courbe auroit une Equation de cette forme ($z^3u + 1 = o$), & bien que ce fût une Hyperbole Quarrée Quarrée conſiderée par rapport à ſon Aſſymptote Triple, néanmoins elle ſeroit ſemblable de figure

à l'Hyperbole Conique.

2°. Si cette Racine diviſoit encore le cinquiéme Rang, ſelon qu'elle ſeroit Diviſeur ſimple, ou double du quatriéme, l'Aſſymptote Courbe ou bien ſeroit compoſée du Syſtême des deux Branches d'une Hyperbole Conique, & des deux qui vont en même ſens dans l'Hyperbole Cubique (*voy. Fig.* 55.), ou bien ce ſeroit une Hyperbole ſeconde Quarrée Cubique, & dont l'Equation auroit par conſéquent cette forme ($z^3 u^2 + 1 = 0$), & celles de ces Branches qui formeroient proprement l'Aſſymptote Courbe ſeroient ſemblables de figure à celles qui vont en ſens contraire dans l'Hyperbole Cubique.

Mais ſi la Racine que nous continuons toujours à conſiderer ne diviſant que les trois premiers Rangs, n'étant dans le troiſiéme que Diviſeur Simple, & dans le

second que Diviseur Double, elle étoit outre cela Racine plus que Triple dans le premier Rang, dès-lors on verroit naître des Branches Paraboliques, & dans le premier cas il y en auroit deux seulement qui seroient Conjuguées à deux Paires de Branches Hyperboliques ordinaires, & qui, selon que cette Racine seroit ou Quadruple, ou Quintuple dans le plus haut Rang, auroient pour Assymptote Courbe ou les Branches d'une Parabole ordinaire, ou celles d'une Parabole seconde Cubique.

Et si on supposoit encore que la Racine en question fût plus que Double dans le second Rang, pour lors selon qu'elle seroit de nouveau ou Quadruple, ou Quintuple dans le premier Rang, l'Assymptote Courbe seroit ou une Parabole premiere Cubique (*voy. Fig. 9*), ou le Systême de deux

Paraboles Coniques à Paramêtres réels, ou imaginaires, & dans le cas qu'ils fussent réels, ils pourroient être encore ou de même Signe, ou bien de Signe différent (*voy. Fig.* 51, 52.).

Enfin si cette Racine étoit de plus supposée Double même dans le troisiéme Rang, en ce cas si elle n'étoit que Quadruple dans le premier, l'Assymptote Courbe seroit la 1iere Parabole Quarrée Quarrée à peu près semblable de figure à la Parabole ordinaire, au lieu que si elle étoit Racine Quintuple du plus haut Rang, alors selon qu'elle seroit Diviseur Triple, ou Quadruple du second Rang, l'Assymptote Courbe ou bien se formeroit du Systême d'une Parabole ordinaire & d'une Parabole premiere Cubique (*voy. Fig.* 56), ou bien seroit une Parabole Seconde Quarrée Cubique, & dont la figure seroit

à peu près semblable à celle de la seconde Parabole Cubique, son Equation devant être de cette forme ($u^2 + z^5 = o$).

Que si reprenant l'hypothêse de l'antepenultiéme cas, la Racine en question, outre qu'elle y étoit Quadruple dans le plus haut Rang, divisoit de plus à présent le quatriéme, ou bien même le quatriéme & le cinquiéme Rang, en ce cas l'Assymptote d'une des Paires de Branches Hyperboliques Conjuguées aux Paraboliques passeroit par l'Origine; de plus dans la seconde subdivision la Paire de Branches à laquelle appartiendroit cette Assymptote auroit pour Assymptote Courbe les deux Branches opposées d'une Hyperbole Cubique, ce qui se combinant avec les cas ci-dessus en produiroit quatre differens, dont nous nous dispensons de joindre ici les Figures,

gures, croyant que le Lecteur y suppleéra facilement.

Et si la Racine en question étoit de plus Racine Double du troisiéme Rang, alors il passeroit par l'Origine une Assymptote Double, & les Branches ausquelles cette Assymptote appartiendroit, & qui seroient Conjuguées aux Paraboliques dont il a été parlé ci-dessus, auroient pour Assymptote Courbe ou les deux Branches qui vont en même sens dans l'Hyberbole Cubique, ou le Systême de deux Hyperboles Coniques à Puissances réelles, ou imaginaires, de même Signe, ou de Signe différent, & ces nouveaux cas combinés encore avec les deux qu'on a déja rapellés dans le cas précédent en produiroient huit autres sur lesquels il seroit trop long de s'arrêter ici.

Si enfin la Courbe ayant deux Paires de Branches Paraboliques

dans une même direction, ainsi que cela s'est trouvé arriver dans le pénultiéme cas de la division précédente, la Racine qui y étoit Quadruple au moins dans le plus haut Rang, Triple au moins dans le second, & simple dans le troisiéme, si, dis-je, cette Racine divisoit de plus le quatriéme, ou même le quatriéme & le cinquiéme Rang, alors l'Origine se trouveroit dans l'Assymptote de la seule Paire de Branches Hyperboliques Conjuguées, & de plus si le cinquiéme Rang étoit aussi divisé par cette Racine, les Branches Hyperboliques auroient pour Assymptote Courbe les deux Branches opposées d'une Hyperbole Cubique.

Nous voici donc enfin arrivés au dernier cas général qui comprend les Equations où la Racine qu'on doit employer dans la Transformation est au moins Di-

viſeur Quadruple du premier Rang, Diviſeur Triple du ſecond, Diviſeur Double du troiſiéme, & Diviſeur Simple du quatriéme, ce qui préſente, pour nous ſervir encore du même terme que nous avons déja employé plus haut, un nouveau ſpectacle de Courbes, dans leſquelles une même direction d'Ordonnées eſt à la fois coincidente avec les dernieres directions de quatre Paires de Branches Infinies, Hyperboliques, ou Paraboliques, réelles, ou imaginaires.

Or il eſt d'abord aiſé d'appercevoir que ſi l'on n'ajoûte rien à la ſuppoſition précédente, les quatre Paires de Branches ſeront Hyperboliques, mais leurs Aſſymptotes Droites pourront être ſituées à des diſtances imaginaires de l'Origine, & aucune de ces Aſſymptotes ne pourra paſſer par l'Origine.

Que si la Racine en question divisoit encore le cinquiéme Rang, l'Origine se trouveroit alors dans une Assymptote.

Et si elle étoit de plus Diviseur Double du quatriéme Rang, ou même Diviseur Double du quatriéme, & Triple du troisiéme, ou même encore Diviseur Double du quatriéme, Triple du troisiéme, & Quadruple du second, dans ces trois cas l'Assymptote Courbe des Branches ausquelles appartiendroit l'Assymptote Droite dont nous venons de parler, & qui maintenant deviendroit Double, Triple, ou Quadruple, cette Assymptote Courbe ne seroit plus une Hyperbole Conique, mais son Equation prendroit ou cette forme ($z^2u+1=o$), qui a pour Lieu les deux Branches qui vont en même sens dans l'Hyperbole Cubique, ou celle-ci ($z^3u+1=o$), dont la figure est à peu

près ſemblable à celle des Hyperboles ordinaires, ou enfin celle-ci ($z^4 u + 1 = o$), dont la figure reſſemble à celle qui correſpond à la premiere forme.

Que ſi la Racine en queſtion étoit Quintuple dans le premier Rang, ou même Quintuple dans le premier Rang, & Quadruple dans le ſecond, ou encore Quintuple dans lepremier, Quadruple dans le ſecond, & Triple dans le troiſiéme, ou enfin Quintuple dans le premier, Quadruple dans le ſecond, Triple dans le troiſiéme, & Double dans le quatriéme, dans ces quatre Suppoſitions on verroit naître des Branches Paraboliques, dont les Aſſymptotes Courbes auroient des Equations de ces formes ($u + z^2 = o$), ($u + z^3 = o$), ($u + z^4 = o$), ($u + z^5 = o$).

La premiere de ces Aſſymptotes Courbes ſeroit donc la Para-

bole ordinaire, ou Conique, la ſeconde la Parabole premiere Cubique, & la troiſiéme, & la quatriéme ſeroient les premieres Paraboles du quatriéme, & du cinquiéme Ordre des Lignes, leſquelles reſſemblent de figure à la Parabole Conique, & à la premiere Parabole Cubique.

De plus dans le premier cas les Branches Paraboliques ſeroient Conjuguées à trois Paires de Branches Hyperboliques, dont il pourroit arriver qu'une Aſſymptote paſsât par l'Origine, que cette Aſſymptote fût coincidente avec l'une des deux autres, ou même avec toutes les deux à la fois.... &c, ſelon que la Racine en queſtion diviſeroit le cinquiémeRang, ou bien encore ſeroit outre cela Diviſeur Double dans le quatriéme Rang, ou bien enfin ſeroit de plus Diviſeur Triple dans le troiſiéme. Or on a vû déja dans le

premier membre de cette ſubdiviſion quelles ſeroient en tous ces nouveaux cas les Aſſymptotes Courbes des Branches Hyperboliques qui leur appartiendroient.

De même dans la ſeconde ſuppoſition les Branches Paraboliques ſeroient Conjuguées à deux Paires de Branches Hyperboliques, dont l'une des Aſſymptotes pourroit paſſer par l'Origine, ou même dont les deux Aſſymptotes, devenant coincidentes, pourroient y paſſer à la fois, ſelon que la Racine qui ſerviroit à la transformation diviſeroit le cinquiéme Rang ſeulement, ou bien ſeroit outre cela Diviſeur Double du quatriéme Rang.

Et ſemblablement l'Aſſymptote de la Paire unique de Branches Hyperboliques qui ſeroit Conjuguée aux Branches Paraboliques de la troiſiéme ſuppoſition,

cette Aſſymptote ne paſſeroit pas, ou paſſeroit par l'Origine, ſelon que le cinquiéme Rang ne ſeroit pas, ou ſeroit diviſé par la Racine en queſtion.

Voilà donc l'Enumeration *adequate* de toutes les formes principales que peuvent recevoir dans les cinq premiers Ordres des Lignes les Branches Infinies Hyperboliques, ou Paraboliques qui auroient une même derniere direction, & qui ſeroient indiquées dans les Eſpéces particulieres par une des Racines, ou par pluſieurs Racines égales du plus haut Rang Horizontal de la Propoſée.

De plus il eſt facile de diſcerner leſquelles ſeulement de ces formes peuvent avoir lieu dans le ſecond, troiſiéme, & quatriéme Ordre, puiſque nous avons indiqué de quel Ordre devoit être l'Aſſymptote Courbe de chacune d'elles.

Enfin

Enfin ſi on faiſoit des réfléxions ſemblables ſur les autres Racines du premier Rang Horizontal de la Propoſée, on parviendroit de même à connoître les figures que pourroit prendre le Syſtême total des deux, quatre, ſix, huit, ou dix Branches Infinies qui peuvent ſe trouver à la fois dans les Lignes des cinq premiers Ordres, quelle que pût être la derniere direction de chaque Paire d'entr'elles, & ſuppoſant ſeulement que les Aſſymptotes de celles qui ne feroient point Paraboliques duſſent paſſer par l'Origine; car les Branches étant Hyperboliques, & leur Aſſymptote ne paſſant point par l'Origine, il faudroit pour parvenir à en connoître la nature, commencer par ajoûter à l'Abſciſſe la quantité néceſſaire pour porter l'Origine dans l'Aſſymptote, & nous nous reſervons à parler plus bas de la ma-

l'uſage, dont il a déja été parlé, de la Régle du Parallelogramme de M. Newton, cette comparaiſon feroit appercevoir une ſuite nouvelle de raports de même eſpéce & qui concourreroient avec les premiers à établir la même Analogie.

En effet ſuppoſant aux derniers Termes d'une Equation propoſée préciſément les mêmes Symptômes qu'on a ſuppoſés à ſes plus hauts Rangs dans le Corollaire précédent, on verroit naître ſur l'Axe de la Courbe qui ſeroit le Lieu de la Propoſée, & à la place des Branches Infinies qu'avoient données ces dernieres ſuppoſitions, les mêmes Points ordinaires, ou Singuliers, Simples, ou Multiples, qui ci-deſſus ont été trouvés analogues à chacune d'elles. La diſtance de ces Points a l'Origine meſurée ſur la Ligne des x ſeroit analogue à l'incli-

naiſon des Aſſymptotes ſur la Ligne des y. Enfin ces Points auroient pour Tangente ou la Ligne des x, ou l'y qui leur conviendroit, ſi les Branches analogues devoient ou être Paraboliques, ou avoir des Aſſymptotes qui paſſaſſent par l'Origine, & ce ne ſeroit que dans le cas qu'ils euſſent en effet l'une des Coordonnées pour Tangente que l'obſervation des derniers Termes de la Propoſée pourroit ſeule ſuffire pour déterminer leur nature.

Mais bien que l'Analogie dont nous parlons reçoive de ces derniers raports une confirmation nouvelle, ils ne peuvent cependant, non plus que les premiers, en faire connoître la raiſon *à priori*; c'eſt-à-dire, que ſi l'on voit avec évidence que les Points différents ſont indiqués par les Rangs inferieurs, & les derniers Termes des Equations de la mê-

il sera en conséquence aisé de conclure que l'Analogie ci-dessus est absolument nécessaire pour que le calcul réponde, ainsi qu'il doit le faire, à ce que demande la nature de la Projection.

Qu'on méne donc d'abord pour cet effet par le Point Lumineux *S* (*voy. Fig.* 57.) deux Plans, l'un *SFIG* parallele au Plan *ACBd* sur lequel doit se faire la Projection, & l'autre *SHLK* parallele au Plan *ACBD* qui doit être projetté : ces deux nouveaux Plans rencontreront chacun celui des deux premiers auquel il ne sera point parallele en une Droite parallele à la Commune Section *ACB* de ces deux-ci, & ces deux Droites *FIG*, *HLK* nous les nommerons la premiere la *Directrice*, & la seconde l'*Antidirectrice* de la Projection.

Qu'on place ensuite dans la Directrice l'Origine de la Courbe à

projetter, & celle de son Ombre ou de sa Projection dans l'Antidirectrice : qu'on suppose dans l'une & dans l'autre les Ordonnées y, & u paralleles à la Directrice, & à l'Antidirectrice, & qu'on prenne pour Axe de la seconde la Projection Cd de l'Axe CD de la premiere : enfin qu'on nomme $\pm p$, & $\pm q$ les distances SI, SL du Point Lumineux à la Directrice, & à l'Antidirectrice.

Tout cela posé les Triangles semblables SPI, CPp, & SPQ, Spq donneront ces Proportions.

z, ou $LC+Cp$ Somme des Bazes des deux premiers Triangles est à $\pm p$, ou SI Baze du Superieur comme $\pm q$, ou CI Somme de leurs petits Côtés est à x, ou PI petit Côté du Superieur, & comme Sp Somme des grands Côtés est à SP grand Côté du Supérieur, ou à cause des deux

Courbe à projetter se projetteront sur le Plan de Projection à une distance finie de l'Origine de l'Ombre, à l'exception seulement de ceux qui seroient infiniment voisins de la Directrice; ceux qui seront situés dans la Directrice même ne se projetteront point; ceux qui lui seront immédiatement inferieurs se projetteront infiniment loin de l'Origine du côté des z positives, & ceux qui lui seront immédiatement supérieurs se projetteront encore infiniment loin de l'Origine, mais du côté des z négatives.

De même l'Antidirectrice ne recevra la Projection d'aucun Point; les Points qui lui seront immédiatement inferieurs recevront la Projection de ceux qui seront dans la Courbe à projetter infiniment éloignés de l'Origine du côté des x positives, & les Points qui lui seront au con-

traire immédiatement superieurs recevront la Projection de ceux qui seront dans la Courbe à projetter infiniment éloignés de l'Origine du côté des x négatives.

2° On appercevra encore facilement que plusieurs Points situés en ligne droite doivent se projetter par autant de Points situés aussi en ligne droite; d'où il suit sans autre démonstration que l'Ombre d'une Courbe quelconque peut être rencontrée par des Droites précisément en autant de Points que la Courbe dont elle est l'Ombre, & qu'ainsi elle doit nécessairement être du même Degré que celle-ci; de plus que la Projection de la Tangente, ou de l'Assymptote d'un Point quelconque est toujours ou Tangente, ou Assymptote de la Projection de ce Point: mais il y a cette difference entre les Projections des Points inferieurs & superieurs à la Di-

rectrice, que si les Tangentes des Points inferieurs étoient situées à leur Droite, ou à leur Gauche dans la Courbe à projetter, les Tangentes des Projections de ces Points seroient dans l'Ombre situées de la même maniere par raport aux Points qu'elles y toucheroient, au lieu qu'elles devroient être situées par raport à ces Points d'une maniere opposée, si ceux dont ils représentent la Projection avoient été dans la Courbe à projetter superieurs à la Directrice.

3° Il suit de là que, si un Point ou ordinaire, ou de Serpentement se trouvoit placé dans la Directrice, de façon néanmoins qu'il ne l'eût point pour Tangente, il se projetteroit par deux Branches Infinies de la figure de celles de l'Hyperbole Conique, c'est-à-dire, opposées, & situées l'une à la Droite, l'autre à la Gauche de leur Assymptote commune, &

l'Hyperbolisme de ces Branches seroit d'un Ordre d'élévation analogue à celui de la Courbure du Point projetté.

Et si on y plaçoit un Point d'Infléxion, les deux Branches Hyperboliques que représenteroit sa Projection iroient toujours en sens contraire ; mais elles seroient situées du même côté de leur Assymptote commune, comme sont celles de la Cissoide, ou les deux opposées de l'Hyperbole Cubique, leur Hyperbolisme étant toujours d'un Degré analogue à celui de l'Infléxion projettée.

Enfin si c'étoit un Point de Rebroussement qu'on voulût placer obliquement sur la Directrice, il se projetteroit par deux Branches Hyperboliques qui iroient en même sens, & seroient situées aux côtés opposés de leur Assymptote commune, telles que sont deux de celles de l'Hyperbole Cubique,

& leur Hyperbolisme seroit semblablement d'un Ordre d'autant plus haut que le Rebroussement projetté seroit censé renfermer un plus grand nombre de Paires d'Infléxions dans son *Folium Evanouissant.*

4°. Si l'Intersection de deux ou plusieurs Branches réelles, & à directions non coincidentes les unes avec les autres, étoit placée dans la Directrice de façon qu'aucune de ces Branches ne dût l'avoir pour Tangente, le Point Multiple que cette Intersection formeroit se projetteroit par un nombre de Paires de Branches Hyperboliques égal à celui qui exprimeroit la Multiplicité de ce Point; de plus les Assymptôtes de ces Paires de Branches Hyperboliques ne pourroient manquer d'être toutes paralleles entr'elles; en effet leur rencontre seroit impossible, puisque si elle étoit possible elle devroit

devroit représenter la Projection d'un Point placé dans la Directrice. Enfin comme l'une de ces Assymptotes devroit être la Ligne même des z supposé que l'une des Branches du Point projetté eût la Ligne des x pour Tangente, ainsi que cela pourroit arriver, il s'ensuit que tout le Systême d'Assymptotes dont nous parlons doit être à la fois parallele à la Ligne des z.

Mais si, les Branches qui formeroient le Point Multiple projetté demeurant toujours réelles, quelques-unes d'entr'elles devenoient coincidentes, on verroit naître alors dans la Projection des Assymptotes Multiples.

Et toutes les Paires de Branches, ou au moins quelques-unes des Paires de Branches adhérentes à ces Assymptotes Multiples deviendroient *Evanouissantes*, ou n'existeroient, pour ainsi dire, que par

leur extrémité, si le Point en question, quoiqu'à directions réelles, étoit cependant imperceptible, comme le sont les Osculations de Sommets Paraboliques à Paramêtres imaginaires, ou bien s'il étoit Multiple d'une Multiplicité imperceptible, ainsi que le Lemnisceros infiniment petit compliqué, ou non compliqué d'Inflëxion, qui à la vûë paroît un Point Simple, ou bien enfin s'il étoit Multiple d'un Ordre imperceptible de Multiplicité comme l'est par exemple le Rebroussement dont il a été parlé à la *Page* 137, & qui à la vûë paroît un Point Double, bien qu'en effet ce soit un veritable Point Quadruple.

Quant aux Branches de Points Multiples, desquelles les directions naissantes devroient être imaginaires, si l'on met dans la Directrice les Points ausquels el-

les appartiendront, elles se projetteront par des Branches Hyperboliques, non à directions imaginaires, mais à Assymptotes paralleles à la Ligne des z, comme celles des cas précédens: seulement leurs distances à l'Origine seront imaginaires, parce que la distance de l'Origine aux Assymptotes de l'Ombre doit, ainsi qu'il est aisé de l'appercevoir, & qu'on l'expliquera plus au long tout à l'heure, avoir pour mesure dans la ligne des u une quantité égale à l'intervalle compris sur la Commune Section du Plan à projetter, & de celui de Projection, entre les Points où cette Commune Section est rencontrée par la Ligne des x, & par les Tangentes dont les Ombres sont representées par ces Assymptotes.

5°. Mais si la Directrice est supposée devenir elle-même la Tangente du Point projetté, pour con-

noître en ce cas quelle pourra être son Ombre, il faut remarquer que si l'on mettoit dans la Directrice l'Intersection de deux Droites prolongées chacune de part & d'autre, elles se projetteroient par deux autres Droites paralleles entr'elles, & dont la distance seroit mesurée sur la Commune Section des deux Plans à projetter, & de Projection, par l'intervalle compris entre les Points où les deux premieres Droites rencontreroient cette Commune Section. Si donc l'Angle formé par ces Droites devenoit le plus grand qu'il fût possible, & que ses deux côtés fussent ou tous deux inferieurs, ou tous deux superieurs à la Directrice, il se projetteroit par les extrémités situées de même côté dans deux Droites qui formeroient un Espace Parallele infiniment large, & par conséquent le Point de Courbe au-

quel il seroit circonscript, & qui ne pourroit être qu'un Point ordinaire, ou un Septentement infiniment petit, dont la Directrice seroit Tangente, ce Point se projetteroit par deux Branches Paraboliques, & Convergentes à la maniere de la Parabole ordinaire, ou Conique.

Que si le Point touché par la Directrice étoit Point d'Inflexion, sa Projection seroit en ce cas donnée par les deux extrémités de l'une des Paralleles qui composeroient l'Espace Parallele dont nous venons de parler. L'Ombre de la Courbe prendroit donc la figure de la Parabole seconde Cubique, ou des Paraboles Divergentes.

Si enfin le Point touché par la Directrice étoit un Rebroussement, sa Projection seroit représentée par les extrémités opposées des deux différentes Paralleles qui composeroient cet Espace Paral-

lele, & l'Ombre seroit d'une figure semblable à celle de la premiere Parabole Cubique.

Bien entendu que dans ces trois cas le Parabolisme des Branches de l'Ombre seroit d'un Degré analogue à celui du Serpentement, de l'Infléxion, ou du Rebroussement de la Courbe projettée, puisque la largeur de l'Espace Parallele, ou la Baze de l'Angle projetté prise sur la Commune Section du Plan à projetter, & de celui de Projection ne peut manquer d'être infinie d'un Ordre analogue à celui qui exprimera de quel Ordre devra être infiniment petit le Sinus du Supplément de l'Angle projetté, ou, ce qui est la même chose, la Courbure du Point projetté.

6°. Si l'Intersection de deux ou plusieurs Branches parmi lesquelles il pourroit y en avoir de coincidentes les unes avec les au-

tres, & même d'imaginaires, si une Interſection pareille étoit placée dans la Directrice de façon que cette Droite y devint Tangente ou d'une Branche ſeulement, ou de pluſieurs Branches coincidentes, dans ces deux cas qui ſont les ſeuls de ce genre qui puiſſent être imaginés (car il répugneroit de ſuppoſer la Directrice Tangente d'une, ou pluſieurs Branches à directions imaginaires), dans ces deux cas, dis-je, on verroit naître dans l'Ombre avec le Syſtême de pluſieurs Branches Hyperboliques à Aſſymptotes toutes paralleles entr'elles, Simples ou Multiples, à diſtances réelles ou imaginaires de l'Origine, une ou pluſieurs Paires de Branches Paraboliques de l'une des trois Eſpeces que nous venons de décrire: ainſi l'Interſection étant par exemple un Point Double ſans Infléxion ni Serpentement infiniment

petit, & dont une Branche ſeulement ſeroit touchée par la Directrice, la Projection repréſenteroit le Trident de la *Fig.* 54.

7°. Si pluſieurs Points Simples, ou Multiples, qui ſeroient ſuppoſés ne pouvoir ſe réunir pour en former un ſeul Multiple d'une Multiplicité ſuperieure à celle de chacun d'eux, ſi de tels Points ſe trouvoient à la fois placés dans la Directrice de telle maniere, & à telle diſtance finie les uns des autres qu'on voudra l'imaginer, la Projection ſe formeroit d'autant de Paires de Branches, ou d'autant de Syſtémes de Paires de Branches à Aſſymptotes paralleles : mais bien que toutes les Branches d'un même Syſtême duſſent avoir la même derniere direction, cependant la derniere direction des Branches d'un Syſtême ne pourroit être la même que celle des Branches d'un autre Syſtême.

8°.

8°. Et si quelques-uns des Points que nous avons placés dans la Directrice venoient à s'éloigner infiniment des autres, ou, ce qui est la même chose, si l'on plaçoit sur la Directrice une Assymptote Simple, ou Multiple, les Branches Hyperboliques ausquelles cette Assymptote appartiendroit se projetteroient par autant de Branches Paraboliques, dont la derniere direction seroit semblable à celle de la Directrice: mais il y auroit cette différence entre les Projections des Branches supérieures, & inferieures à la Directrice, que celles-çi iroient en même sens que les Branches qui les auroient formées, au lieu que celles-là tendroient du côté négatif vers la Gauche, ou vers la Droite, selon qu'auroient tendu vers la Droite, ou vers la Gauche les Branches Hyperboliques dont elles representeroient l'Ombre.

Par conséquent les Branches de la Projection seroient Convergentes à la maniere de celles de la Parabole ordinaire, ou Conique, si celles de la Courbe projettée avoient été Divergentes à la maniere de celles de l'Hyperbole Conique, c'est-à-dire opposées, mais placées aux deux côtés differens de leur Assymptote commune; elles seroient Divergentes de la façon de celles de la seconde Parabole Cubique, si celles qui les formeroient avoient aussi été Divergentes à la maniere de celles qui sont telles dans l'Hyperbole Cubique, c'est-à-dire opposées, & situées du même côté de leur Assymptote commune; elles seroient enfin Divergentes à la maniere de celles de la premiere Parabole Cubique, si elles étoient formées par l'Ombre de deux Branches Hyperboliques Convergentes, telles qu'on en voit dans

l'Hyperbole Cubique.

De plus le Degré de Parabolisme des Branches de l'Ombre ne pourroit manquer dans tous ces cas d'être analogue au Degré d'Hyperbolisme des Branches projettées.

Enfin, si l'Assymptote placée dans la Directrice étoit une Assymptote Multiple, & à laquelle appartînt le Systême de plusieurs Paires de Branches Hyperboliques dont chacune en particulier seroit nécessairement de l'une des trois formes dont nous venons de parler, en ce cas l'Ombre comprendroit le Systême d'autant de Paires de Branches Paraboliques de formes analogues à celles des Hyperboliques par la Projection desquelles elles se seroient formées.

9°. On se convaincra facilement de la verité des Inverses de toutes les Propositions que nous

venons de démontrer, & en général il ſera aiſé de s'appercevoir que les differentes Branches Infinies de la Courbe à projetter doivent avoir pour Projection dans l'Antidirectrice des Points de la Multiplicité, & de l'eſpece de Singularité qui ſeroient requiſes, afin que, placés dans la Directrice, ils donnaſſent pour Ombres les differentes Branches Infinies par leſquelles, dans la ſuppoſition préſente, ils ſont eux-mêmes formés.

De plus, faiſant un raiſonnement ſemblable ſur les Branches Paraboliques dont la derniere direction devra être parallele à la Directrice, on trouvera que leur Ombre formera autant de Branches Hyperboliques analogues, & dont l'Aſſymptote tombera néceſſairement ſur l'Antidirectrice.

On peut donc à préſent, en vertu de tout ce que nous venons d'établir ci-deſſus, aſſurer géné-

ralement que l'Analogie que nous avions observée (*Pag.* 148, *& suiv.*) étoit, ainsi que nous l'avons annoncé depuis, absolument nécessaire, afin que les resultats du Calcul répondissent, comme cela doit arriver en effet, à ce que les Principes les plus simples de la Théorie des Ombres, ou des Projections pouvoient d'ailleurs, & indépendamment du Calcul faire découvrir sur ce sujet, & voilà par conséquent la raison *à priori* que nous avions en dernier lieu promis de donner de cette Analogie si remarquable.

Avant néanmoins d'abandonner entierement cette matiere nous croyons à propos de joindre ici deux autres observations qui seront comme autant de conséquences de celles que nous avons déja faites.

En premier lieu nous remarquerons que la Théorie que nous

venons de déveloper peut conduire facilement à la démonſtration d'une belle Propoſition annoncée par M. Newton dans ſon *Enum. Lin.* 3^{i}. *Ord.*, & qui a été depuis démontrée dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris par MM. Clairaut, & Nicole Membres illuſtres de cette Compagnie ; c'eſt que les cinq Paraboles Divergentes du troiſiéme Ordre des Lignes peuvent elles ſeules former par leurs différentes Ombres toutes les autres Lignes de cet Ordre.

En effet l'inſpection des Figures que M. Newton a aſſignées pour cet Ordre de Lignes fait voir (& d'ailleurs nous aurons plus bas occaſion de le prouver par d'autres moyens) que dans ce même Ordre, & ſi on en excepte ſeulement deux des Paraboles Divergentes, toutes les Eſpeces qui n'ont aucun Point d'In-

flexion doivent dès-lors avoir, comme en échange, deux Branches Infinies Hyberboliques Divergentes, & situées de même côté par raport à leur Assymptote commune, ou comme les appelle M. Newton, deux Branches Hyperboliques à Diamétres, & *vice versa* que les Espéces qui n'ont aucune Paire de Branches Hyperboliques dans de pareilles conditions doivent avoir au moins un Point d'Infléxion. Or plaçant dans la Directrice l'Assymptote d'une pareille Paire de Branches, si une telle Paire a lieu dans l'Espece proposée, ou bien, y plaçant dans le cas contraire un Point d'Infléxion, de façon que la Directrice en devienne Tangente, on trouvera par là le moyen de faire naître pour l'Ombre de toute Ligne du troisiéme Ordre une Parabole Divergente de cet Ordre. Donc par l'Inverse il n'est



point de Ligne du troisiéme Ordre qui ne puisse être formée par l'Ombre d'une des Paraboles Divergentes de cet Ordre.

En second lieu l'Analogie observée ci-dessus, & que nous venons de confirmer peut conduire aussi à découvrir sur les Points des Courbes des Propriétés analogues à toutes celles qu'on connoîtra déja sur leurs Branches Infinies, & réciproquement à en découvrir sur les Branches Infinies d'analogues à celles qu'on connoîtra déja sur les Points differents.

Ainsi de ce que M. Newton a enseigné que deux des trois Paires de Branches Hyperboliques dont sont composés les Systêmes des Hyberboles Redundantes du troisiéme Ordre ne pouvoient avoir de Diamétre sans que la troisiéme Paire n'en eût aussi nécessairement, de cela, & des obser-

vations précédentes on peut déduire fort aisément cette Propriété générale, & jusqu'ici inconnuë des Lignes du troisiéme Ordre, que si une Ligne quelconque de cet Ordre doit avoir à la fois trois Points d'Infléxion, ces Points ne peuvent manquer d'être situés dans une même Droite, & que si elle en a deux seulement, la Droite qui les joindra sera nécessairement parallele à la derniere direction de deux Branches Hyperboliques ou Paraboliques Divergentes, & situées de même côté par raport à leur Assymptote commune, c'est-à dire, à la derniere direction de deux Branches à Diamétres; ce qui paroît néanmoins contredit par les Figures que l'illustre M. Newton a jointes à son Traité des Lignes du troisiéme Ordre.... & ainsi des autres Proprietés.

primée par un nombre impair, 3°. que si pour la Transformation l'on se sert d'une Racine Simple du plus haut Rang de la Proposée, il ne manquera à la Transformée que son premier Terme ; le Coefficient de celui qui y deviendra le premier ne pourra donc être qu'un Binome, qui égalé à zero ne donnera qu'une Racine, & ne pourra par conséquent en donner d'imaginaires ; 4°. que si on veut dans la Transformation se servir d'une Racine Multiple d'une Multiplicité exprimée par un nombre impair, en ce cas si cette Racine n'est pas consécutivement Multiple dans les Rangs inferieures au premier, & toujours d'une Multiplicité d'autant moindre que les Rangs s'éloigneront plus du premier, si cette condition, dont il a été parlé *Pag.* 177, 178, 187 n'a point lieu, la Courbe ne pourra man-

quer d'avoir des Branches Paraboliques, & si au contraire cette condition a lieu, ce qui rendra Hyperboliques toutes les Branches dont la derniere direction devra être parallele aux Ordonnées de la Transformée, pour lors il devra manquer à la Transformée un nombre impair de ses premiers Termes; le Coefficient de celui qui y deviendra le premier par le manquement des autres sera donc un Polynome d'un Degré impair, & par conséquent l'égalant à zero, il résultera de cette Egalité au moins une Racine réelle, ce qui rendra réelle la distance de l'Origine à l'une au moins des Assymptotes qui devoient être paralleles aux Ordonnées de la Transformée.

Il est donc démontré que dans les Lignes d'un Ordre impair il doit toujours se trouver une Paire au moins de Branches Infinies

dont la direction ne puiſſe être imaginaire, non plus que la diſtance finie, ou infinie de l'Origine à ſon Aſſymptote, c'eſt à-dire, qu'il doit au moins ſe trouver toujours dans ces Lignes une Paire réelle de Branches Infinies Hyperboliques ou Paraboliques.

Or quoique cette verité pût auſſi ſe prouver d'une maniere fort ſimple en ſuivant juſques dans l'infini, comme l'a fait par exemple M. Nicole (*voy. Mem. de l'Acad. Royale des Sciences de Paris an.* 1729.) un Syſtême d'Ordonnées repreſentées dans une Equation de la Courbe par une Indéterminée qui y ſeroit élevée au Degré de l'Equation même, nous avons néanmoins préferé la démonſtration précédente, parce qu'elle a l'avantage de répondre directement à la difficulté qu'il étoit naturel qu'on ſe fît ſur ce ſujet, & que nous avions en

conséquence exposée dans le commencement de cette seconde Remarque.

COROLLAIRE CINQUIE'ME.

Où l'on enseigne à découvrir les conditions qui peuvent rendre d'une Multiplicité, ou d'une Singularité quelconque le Point où est situé l'Origine, celles qui peuvent faire passer par l'Origine l'Assymptote d'une, ou plusieurs Paires de Branches Hyperboliques de telle ou telle Espece, celles enfin qui peuvent donner à la Courbe proposée des Branches Paraboliques de telle Espece qu'on voudra.

Ce Corollaire ne sera qu'une suite naturelle de ce que nous avons établi dans les deux derniers. En effet après les observations que nous y avons faites il est presque inutile de remarquer ici que l'Origine ne passant point

par un Point proposé, ou par l'Assymptote d'une ou plusieurs Paires de Branches Hyperboliques d'Especes données, ou bien enfin n'y ayant point dans la Courbe de Branches Paraboliques de telle ou telle sorte, si l'on veut connoître dans quelles conditions pareilles choses pourroient arriver, il suffira de supposer vraies toutes les Equations particulieres qui, selon ce que nous avons fait voir, en sont les Symptomes nécessaires; d'où par la réduction réïterée autant qu'il sera besoin de deux Equations en une seule on parviendra à l'expression la plus simple de l'une des conditions qu'on cherchera, & on trouvera semblablement la plus simple expression des autres conditions en prenant dans celle-ci la valeur de l'une des Lettres qui sont employées dans son énoncé, & la substituant par tout ailleurs, selon

lon que le prescrivent les Régles ordinaires de l'Analise combinées avec celles que nous avons données aux *Pag.* 60, *&* 118.

Si par exemple on vouloit sçavoir dans quelles conditions l'Origine deviendroit un Lemmisceros infiniment petit ordinaire, ou sans Infléxion, on feroit d'abord égaux à zero tous les membres différens des trois Rangs inferieurs de la Proposée, on supposeroit de même égal à zero 1°. le quatriéme Rang, 2°. le Trinome, qui viendroit en multipliant ce quatriéme Rang Terme à Terme par les Termes d'une Progression Arithmetique qui eût zero pour l'un de ses Extrêmes, 3°. le Binome qui proviendroit semblablement en multipliant ce Trinome par une nouvelle Progression, & enfin on supposeroit que le Binome dont nous venons de parler ne pût diviser le cinquiéme Rang.

De même si on cherchoit dans quelles conditions une Courbe Proposée pourroit avoir un Systême de deux Paires de Branches semblables de figure à celles du Trident qu'on voit à la Figure 54, & dont il a été parlé ci-dessus *Pag.* 177, on supposeroit égal à zero 1°. le plus haut Rang de la Proposée, 2°. le Polynome qui proviendroit de la multiplication Terme à Terme de ce plus haut Rang par les Termes d'une Progression Arithmétique qui eût zero pour l'un de ses Extrêmes, 3°. le second Polynome qui proviendroit de celui-ci par une multiplication pareille, 4°. le second Rang en descendant, 5°. On supposeroit encore que le Polynome qui proviendroit de la multiplication de ce second Rang par une Progression Arithmétique, ne pourroit être en même tems égal à zero, non plus que le troisiéme Poly-

nome qu'on auroit pû tirer du plus haut Rang, lequel ne sçauroit en effet s'anéantir sans que les Branches Paraboliques devinssent d'un Ordre de Parabolisme superieur au premier, 6°. si l'Origine devoit se trouver dans l'Assymptote des Branches Hyperboliques, on supposeroit de plus égal à zero le troisiéme Rang en descendant, & enfin l'Hyperbolisme de ces Branches devant être du premier Ordre, on supposeroit aussi que le quatriéme Rang, ne pourroit devenir égal à zero en même tems que les autres Rangs, ou Polynomes dont il a été déja parlé, & ainsi des autres exemples qu'on pourroit proposer.



LEMME QUATRIE'ME

Où l'on donne une Méthode abregée, & analogue à celles du Calcul Differentiel, pour transporter l'Origine d'une Courbe dans un point quelconque du Plan sur lequel cette Courbe est décrite.

Nous avons déja remarqué dans la premiere Section de cet Ouvrage (*voy. Pag.* 7, & 8.) d'après M[rs]. Saurin, & Bernoulli, que nous y avons cités, que si l'on bannissoit de toutes les Différentielles d'une Equation Proposée toutes les Differences d'un genre superieur au premier, qu'on les divisât de plus la seconde par 2, la troisiéme par 2, & par 3, la quatriéme par 2, par 3, & par 4. . . . &c, & qu'enfin on les ajoûtât toutes ensemble après les avoir ainsi préparées, la Somme qui résulteroit de cette addition representeroit la Transf-

formée qu'on auroit euë en ſubſtituant $x+dx$, & $y+dy$ à la place de x, & de y dans la Propoſée. Mais pour tranſporter l'Origine d'une Courbe dans un point quelconque de ſon Plan, il ſuffit (p, & q, repreſentant deux Lignes indéterminées quelconques poſitives, ou négatives) de ſubſtituer dans l'Équation de cette Courbe $p+z$, & $q+u$ à la place de x, & de y. Il ſuit donc de là que pour avoir la Transformée convenable à cet effet il faudra ſeulement ſuppoſer dans l'Equation qu'on pourra faire à la maniere que nous venons de décrire de la Somme des Differentielles de la Propoſée que les quantités x, y, dx, dy repreſentent reſpectivement p, q, z, u, ou bien encore z, u, p, q.

Et comme la premiere de ces ſuppoſitions a pardeſſus l'autre l'avantage de preſenter aux yeux la Transformée toute ordonnée,

par cette raiſon nous nous en ſervirons communément, & ſurtout lorſqu'il ſera queſtion d'aſſigner une Transformée générale; mais il faudra en revanche préferer la ſeconde lorſque p, & q ſeront des quantités données, parce qu'alors il ſera à propos de ſubſtituer leur valeur à la place de dx, & de dy à meſure qu'on opérera.

COROLLAIRE PREMIER

Où l'on enſeigne à trouver les Points Multiples des Courbes lorſqu'ils ſont ſitués hors de l'Origine.

Pour connoître les conditions d'exiſtence, & le lieu des Points Multiples ſitués hors de l'Origine il ſuffira de tranſporter l'Origine dans un point quelconque du Plan de la Courbe propoſée, après quoi dans la Transformée convenable à ce tranſport général on ſuppoſera exiſtens les Symptomes que nous avons vû ci-deſ-

fuſ avoir lieu lorſque l'Origine devoit ſe trouver dans le Point cherché, & ſi ces ſuppoſitions n'impliquent point contradiction, elles méneront à déterminer les indéterminées p, & q repreſentées dans l'Equation de la Somme des Differentielles par x, & par y, & propres à porter en effet l'Origine dans le Point en queſtion, auſſi bien que les conditions d'où dépendra l'exiſtence de ce Point.

Ainſi l'on trouvera les Points Doubles d'une Ligne quelconque en faiſant à la fois $= o$ 1°. ſon Equation même, 2°. les deux Coefficiens de dx & de dy dans ſa premiere Differentielle.

Mais pour trouver les Points Triples il faudra outre cela faire ſéparément $= o$ dans la ſeconde Differentielle chacun de ſes Coefficiens, c'eſt-à-dire, celui de dy^2, celui de dx dy, & celui de dx^2.

De même pour trouver les Points Quadruples on fera encore $=o$ chacun des quatre membres de la troisiéme Differentielle... & ainsi des autres.

Tout cela n'est qu'une suite ou de ce qui a été dit *Pag.* 91, 92, dans le Corollaire premier du Lemme troisiéme, ou de ce que la Proposée, & ses differentes Differentielles par ordre doivent former les Rangs differens de l'Equation qu'on peut faire de la Somme de toutes les Differentielles à la maniere qui a été décrite ci-dessus.

Et on peut d'abord en conclure que l'existence des Points Doubles dans les Courbes n'est *engénéral* attachée qu'à une condition, que celle des Points Triples dépend de quatre conditions, celle des Points Quadruples de huit, celle des Points Quintuples de treize... &c, ce qui

qui n'empêche pourtant pas que dans des Espéces particulieres ces Points Multiples n'ayent lieu absolument, ou indépendamment de toutes conditions, & même qu'ils ne deviennent en d'autres Espéces absolument impossibles.

Mais ce qu'il nous importe surtout de faire voir ici, c'est le peu d'exactitude d'une Méthode contraire à la nôtre, qui a été donnée par M. l'Abbé de Bragelongne pour l'invention des Points Triples, & que ce Géométre a dit être applicable par induction aux Points Multiples d'un Ordre superieur de Multiplicité.

Cette Méthode, que l'Auteur a expliquée à l'*Art.* 152, *& suiv.* de son Ouvrage sur les Lignes du quatriéme Ordre, consisteroit à comparer seulement à la Proposée trois Equations particulieres, qui seroient les mêmes qu'on auroit en égalant séparément à ze-

ro les trois Coefficiens de la seconde Differentielle prise à notre maniere, sans qu'il fût nécessaire de lui comparer encore, ainsi que nous l'avons prescrit, les deux autres Equations particulieres qu'on auroit semblablement en égalant à zero les Coefficiens de la premiere Differentielle; d'où il suivroit que l'existence des Points Triples devroit dépendre non de quatre Conditions, ainsi que nous l'avons marqué, mais de deux Conditions seulement.

Or après ce que nous venons de dire il doit être évident que si l'on transporte l'Origine dans le Point trouvé par cette Méthode, il ne manquera essentiellement à la Transformée convenable à ce transport d'Origine que le premier, & le troisiéme de ses Rangs Inferieurs; le second pourra au contraire s'y trouver, & il s'y trouvera même né-

cessairement, excepté que des circonstances étrangeres ne soient cause que les mêmes suppositions qui satisferoient dans certaines Especes particulieres aux quatre Equations dont a parlé M. de B. satisfassent aussi aux deux autres que nous croyons qu'il a oubliées, ce qui arrive en effet dans les Exemples que cet Auteur s'est proposé.

Par conséquent la Méthode qu'il a donnée ne pourroit porter essentiellement à un Point Triple qu'autant qu'il seroit vrai que l'Origine se trouvant dans un Point pareil il ne devroit manquer dans l'Equation de la Courbe que le premier, & le troisiéme de ses Rangs inferieurs, & non les trois premiers Rangs à la fois; or cela est contraire & aux Principes que nous avons établis plus haut (*voy. Pag.* 91) & à ceux que M. de B. a démon-

tré lui-même dans son troisiéme Mémoire (*Art.* 136.).

C'est ainsi qu'à en juger par la Méthode de M. de B. on donneroit un Point Triple à la Courbe dont l'Equation seroit ($\overline{y^4 + x^4} - 4a.\overline{y^3 + x^3} + 6a^2.\overline{y^2 + x^2} - 3a^3.\overline{y + x} = o$), & ce Point devroit se trouver en faisant dans cette Courbe ($x = a$), & ($y = a$): cependant il est certain que le Point où ces suppositions porteroient doit être non un Point Triple, mais un Serpentement infiniment petit, qui comme on l'a vû plus haut est un veritable Point Simple.

Et il est à propos de remarquer à cette occasion que si la Méthode en question n'indique point nécessairement les Points Triples, ainsi que son Auteur le prétend, au moins indique-t'elle nécessairement l'alternative entre l'exis-

tence d'un Point Triple,& l'existence d'un Point Simple Singulier.

Il faut néanmoins se bien garder d'ailleurs de la croire générale pour tous les Points Singuliers ; car indiquant ceux qui, s'ils étoient placés dans l'Origine, feroient manquer essentiellement quelques-uns des Rangs superieurs au second, elle ne peut faire connoître de la même maniere ceux qui placés semblablement dans l'Origine rendroient simplement divisibles par le second Rang quelques-uns des Rangs qui seroient supérieurs à celui-là.

Quant à la Méthode que M. l'Abbé de B. avoit donnée dans son second Memoire, (*Art.* 90.) pour l'invention des Points Doubles, elle est à la verité bonne, & exacte, cependant il y a encore quelque chose à reprendre dans la maniere dont cet Au-

teur en a fait l'application.

En premier lieu, lorsqu'il s'agit de réduire deux Equations en une seule, il n'employe pas pour cela la Méthode de M. Newton, dont nous avons déja tant parlé, & qui est la plus simple & la plus générale qu'on connoisse pour cet effet. Au contraire il prescrit de tirer la Racine d'une des Equations qu'il appelle Auxiliaires, & d'en substituer la valeur dans l'autre... &c. Or cette Résolution d'Equations renfermant differentes difficultés, ce ne sera aussi que très-difficilement qu'on parviendra par son moyen à la détermination de la condition de l'existence du Point cherché, & c'est néanmoins ce qu'on doit principalement avoir en vûë d'assigner.

En second lieu M. l'Abbé de B. s'est contenté de faire connoître si les Courbes avoient des Points

Doubles, & il ne s'eſt point attaché, comme il auroit été naturel de le faire, à découvrir les conditions par l'exiſtence deſquelles les Courbes, qui en general n'auroient pas de Points pareils, pourroient néanmoins en acquerir quelquefois.

En troiſiéme lieu, & cet Article mérite une attention particuliere, cet Auteur néglige dans les Exemples qu'il s'eſt propoſé des Diviſeurs d'Equations, dont à la verité l'examen auroit rendu ſon calcul plus long, mais que cependant il n'étoit nullement en droit de négliger; puiſque lorſqu'il s'agit d'examiner les Racines d'une Equation, il n'y a aucun choix à faire entre les Diviſeurs differens dans leſquels en certains cas particuliers cette Equation peut ſe décompoſer.

Et quant aux Méthodes que M. de B. annonce dans l'Aver-

tiſſement qu'il a mis à la fin de ſon troiſiéme Mémoire pour trouver les Points Multiples d'une Multiplicité quelconque, elles ne pourroient ſans doute manquer de participer aux défauts des précédentes, puiſque l'Auteur prétend qu'elles doivent être déduites des mêmes Principes que celles-ci.

Mais outre cela il eſt aſſez ſurprenant que ce Geométre paroiſſe comme il le fait dans cet Avertiſſement avoir penſé que dans des Ordres différens il faudroit differentes régles pour découvrir des Points d'une même Multiplicité, & il l'eſt encore davantage qu'il promette l'Enumeration des Lignes du quatriéme Ordre, n'ayant encore rien dit ſur les differentes Eſpéces, & les différentes diſpoſitions reſpectives de Branches Infinies, qui peuvent avoir lieu dans cet Ordre de Lignes.

COROLLAIRE SECOND

Où l'on enseigne à tirer les Tangentes d'un Point quelconque, Simple, ou Multiple, Ordinaire, ou Singulier, situé à telle distance qu'on voudra de l'Origine, à connoître à tous égards l'Espece dont un tel Point peut être, & enfin à discerner dans quelles conditions un Point quelconque peut devenir de telle ou telle Espece proposée.

Après s'être convaincu par la Méthode qui a été indiquée dans le Corollaire précédent si une Courbe à un, ou plusieurs Points Multiples d'un Ordre donné de Multiplicité, pour parvenir de plus à tirer les Tangentes d'un tel Point, & pour s'assurer de quelle Espece il devra être dans son Ordre de Multiplicité, on commencera par y transporter en effet l'Origine, ce qui demandera seu-

lement qu'on substituë dans l'Equation faite de la Somme des Differentielles les Valeurs resultantes de toutes les conditions de la Multiplicité en question, après quoi on fera sur cette Equation ainsi changée, y regardant toujours dx, & dy comme ses indéterminées, les mêmes observations qui ont été faites sur les Proposées dans le second, & dans le troisiéme Corollaire du troisiéme Lemme.

Mais si on cherchoit dans quelles conditions un Point quelconque pourroit devenir d'une Multiplicité, & d'une Espece Proposée, alors il faudroit ne faire aucun changement, ni aucune substitution dans l'Equation de la Somme des Differentielles, & s'en servir ainsi qu'on s'est servi de la Proposée dans le Corollaire cinquiéme du troisiéme Lemme.

Par conséquent puisque dans

la ſuppoſition du Lemme troiſiéme, où le Point qu'on examinoit étoit placé dans l'Origine même, il a ſuffi pour trouver dans ce Point le rapport de *n* à *m*, c'eſt-à-dire, celui de ſa Soûtangente avec ſon Ordonnée, de chercher le rapport des deux Coordonnées dans l'Equation particuliere qu'on a pû faire du Rang Horizontal que la Multiplicité du Point avoit fait devenir le premier; puiſque d'ailleurs dans la ſuppoſition préſente la Transformée que repreſente l'Equation faite de la Somme des Différentielles, & dont les differentes Differentielles forment par ordre les Rangs differens, puiſque cette Transformée eſt dans le même cas & les mêmes conditions où étoit la Propoſée du Lemme troiſiéme, il ſuit de tout cela que pour trouver en général le rapport de la Soûtangente

& de l'Ordonnée dans un Point quelconque, situé à telle distance qu'on voudra de l'Origine, il faut chercher le rapport de dx à dy dans la premiere entre les Differentielles dont la Multiplicité du Point ne fera pas disparoître à la fois tous les Coefficiens.

Donc si le Point est Simple, il faudra prendre pour le rapport de la Soûtangente à l'Ordonnée la valeur que donnera la premiere Differentielle pour le Rapport de dx à dy.

Mais si le Point est Double il faudra assigner pour valeurs à ce même rapport celle que donnera la seconde Differentielle pour le rapport de dx à dy... & ainsi des autres Points Multiples.

Et si l'on veut de plus s'assurer si le Point, au cas qu'il soit Simple, ou bien au cas qu'il soit Multiple, si l'une des Branches qui doivent le former ne subissent

point des Infléxions, ou des Serpentemens infiniment petits, on concluëra de ce qui a été dit dans le troisiéme Corollaire du troisiéme Lemme qu'il suffira pour celá d'examiner si la Differentielle devenuë la premiere par l'anéantissement de tous les Coefciens des Différentielles Inferieures n'aura point de Diviseur commun avec les Differentielles immédiatement superieures.

Le Point étant Simple, par, exemple, on pourra assurer qu'il será Point d'Infléxion si la premiere Differentielle ordonnée par rapport à la fraction $\frac{dx}{dy}$ divise la seconde Differentielle ordonnée semblablement, au lieu que ce seroit un Serpentement infiniment petit si la premiere Differentielle divisoit à la fois la seconde, & la troisiéme.

Mais le Point étant Double, si

de plus l'un des Diviseurs de la seconde Differentielle divise pareillement la troisiéme, on pourra conclure alors que l'une des Branches dont ce Point sera formé subira dans ce Point même une Infléxion, laquelle se changera en un Serpentement infiniment petit, au cas que le Diviseur en question divise à la fois la troisiéme, & la quatriéme Differentielle.

De même on jugera de la coincidence, ou de la non coincidence des differentes Branches dont un Point Multiple sera composé par l'égalité, ou l'inégalité des Racines que donnera la Differentielle devenuë la premiere, si on en fait une Equation particuliere.

Et semblablement ces Branches seront démontrées coincidentes avec l'*x*, ou l'*y* qui leur conviendront, c'est-à-dire, que les *y*, ou les *x* y passeront par un *Maximum*, ou

par un *Minimum*, si l'Equation faite de la Differentielle devenuë la premiere doit avoir des Racines ou nulles, ou infinies, ou, ce qui est la même chose, s'il doit manquer à cette Differentielle ses premiers membres vers la Droite, ou vers la Gauche.

Mais si, la situation d'un Point Multiple, ou Singulier n'étant point déterminée, on cherchoit au contraire dans quel endroit du Plan de la Courbe pourroit se trouver un tel Point, ou bien même un *Maximum*, ou un *Minimum*, alors appliquant ici les principes établis ci-dessus on découvriroit differentes Regles dont voici les huit principales.

METHODE.

Pour trouver les Maximum, *& les* Minimum *des* x, *& des* y.

Il suffira pour cela de faire égal à zero le Coefficient de dy, ou de dx dans la premiere Differentiel-

le; & combinant l'Equation qui résultera de cette supposition avec la Proposée, on en tirera les valeurs de x, ou de y propres au *Maximum*, ou au *Minimum* cherché.

Bien entendu cependant que les deux Coefficiens de la premiere Differentielle ne viendront pas à s'évanoüir à la fois, car si cela arrivoit le Point trouvé seroit un Point Double, & ne pourroit être la limite proprement dite d'un *Maximum*, ou d'un *Minimum*.

En effet supposant même que ce fût un Rebroussement d'une direction coincidente avec celle des y, alors une valeur de y y deviendroit de réelle croissante, imaginaire, & une autre y deviendroit d'imaginaire, réelle décroissante, *aut vice versà*; mais ce ne seroit pas une même valeur d'y qui y deviendroit de croissante, décroissante, ou de décroissante, croissante.

METHODE

Pour trouver les Points d'Inflexion.

On ordonnera par rapport à la fraction $\frac{dy}{dx}$ la premiere, & la seconde Differentielle, & ayant divisé celle-ci par celle-là, on supposera égal à zero le Reste que donnera cette Division ; cette nouvelle Equation étant ensuite combinée avec la Proposée par les Formules de Mr Newton, ou par la Méthode dont nous nous sommes nous-mêmes servis *Pag.* 60. il en resultera les valeurs de x, ou de y convenables au Point d'Infléxion.

Cela suppose néanmoins que toutes les substitutions propres à ce Point étant faites la premiere Differentielle ne se trouvera point diviser la troisiéme, auquel cas le Point seroit un Serpente-

ment infiniment petit, ou encore que les deux Coefficiens de la premiere Differentielle ne deviendront pas à la fois égaux à zero, ce qui rendroit Double le Point Singulier.

MÉTHODE

Pour trouver les Serpentemens infiniment petits.

On divisera la troisiéme, & la seconde Differentielle par la premiere, on réduira ensuite à une seule les deux Equations qu'on aura en égalant à la fois à zero les Restes qui proviendront de ces deux Divisions. Enfin la Résultante de cette réduction étant combinée avec la Proposée, on déduira de tout celà & les valeurs de x, & de y propres à porter au Serpentement, & la condition de son existence.

Cela suppose semblablement

que la premiere Differentielle ne pourra diviser la quatriéme en même tems qu'elle divisera la seconde, & la troisiéme, comme aussi que les deux Coefficiens de la premiere Differentielle ne deviendront point à la fois égaux à zero par les substitutions convenables à ce Point, car si l'une ou l'autre de ces conditions avoient lieu, le Point deviendroit ou une Inflexion de la seconde Espece, ou bien un Point Double.

METHODE

Pour trouver les Points de Rebroussement ordinaires.

Pour cela il seroit à propos de chercher d'abord la situation des Points Doubles dont la Courbe peut être chargée, ce qu'on feroit par la Méthode qu'on a donnée dans le dernier Corollaire, & examinant ensuite de la ma-

niere qu'on a enſeigné dans celui-ci quelle devroit être l'Eſpece des Points trouvés, on viendroit à bout de ſe convaincre ſi l'un de ces Points ne pourroit pas être un Rebrouſſement.

Mais ſi on vouloit trouver tout d'un coup les ſeuls Rebrouſſemens ordinaires, & non les autres Points Doubles qui peuvent avoir lieu dans la Courbe, en ce cas on multiplieroit la ſeconde Differentielle Terme à Terme par les Termes d'une Progreſſion Arithmetique, qui auroit zero pour l'un de ſes Extrêmes, & on la diviſeroit enſuite par le Produit qui auroit reſulté de cette Multiplication : après quoi le Reſte de cette Diviſion ſeroit fait égal à zero, & on combineroit par les régles qui ont été données ci-deſſus l'Equation que cela produiroit & avec la Propoſée, & avec les deux autres Equations

qu'on pourroit faire en égalant séparément à zero chacun des membres de la premiere Differentielle, ce qui feroit connoître & la valeur des Coordonnées correspondantes au Rebroussement cherché, & les deux conditions de son existence.

Bien entendu cependant que la troisiéme Differentielle ne pourroit se diviser, ainsi que l'auroit pû la seconde, par le Produit trouvé en multipliant cette seconde Differentielle Terme à Terme par les Termes d'une Progression Arithmétique, & que d'ailleurs les trois Coefficiens de la seconde Differentielle ne pourroient devenir égaux à la fois à zero; car si l'une de ces deux choses avoit lieu, le Point trouvé seroit ou une Osculation, ou un Point Triple.

METHODE

Pour trouver les Osculations ordinaires.

Elle est la même que la précédente à l'exception qu'il faudra à l'heure qu'il est diviser non seulement la seconde Differentielle, mais encore la troisiéme par le Produit trouvé en multipliant la seconde Terme à Terme par les Termes d'une Progression Arithmétique, ce qui donnera deux Restes au lieu d'un, & par conséquent cinq Equations à combiner, & non quatre seulement; d'où il resultera enfin trois conditions de l'Existence des Osculations, au lieu que nous n'en avons trouvé que deux pour l'existence du Rebroussement.

Et on fera des Remarques analogues aux précédentes pour les cas où les Branches de l'Oscula-

tion viendroient à acquerir quelque nouveau degré de *Singularité*, comme aussi pour ceux où le Point devroit devenir Multiple d'une Multiplicité supérieure.

METHODE

Pour trouver les Points Conjugués de la premiere Espece, & les Points Doubles d'Intersection.

On substituëra dans la seconde Differentielle & les valeurs des Coordonnées, & le resultat de la Condition qu'on aura trouvé être propres aux Points Doubles, après quoi on supposera dans cette Differentielle que le Quarré de la moitié du Coefficient de $dx\,dy$ soit plus petit, si l'on cherche un Point Conjugué, ou plus grand, si l'on cherche un Point de Croix, que le Produit du Coefficient de dy par celui de dx^2 … &c.

Et si les deux Branches imaginaires, ou réelles du Point devoient subir chacune une Infléxion dans ce Point, il faudroit alors égaler encore á zero le Reste qui viendroit de la Division du quatriéme Rang par le troisiéme, mais si il n'y avoit que l'une des deux Branches seulement qui dût subir Infléxion, alors il faudroit se contenter de supposer un Diviseur Commun au quatriéme, & au troisiéme Rang... &c.

METHODE

Pour trouver les Lemnisceros infiniment petits.

On multipliera la troisiéme Differentielle Terme à Terme par les Termes d'une Progression Arithmétique qui ait zero pour l'un de ses Extrêmes, & on réïtérera cette Opération sur le Produit même qu'on viendra de trouver

trouver ; ce qui donnera un second Produit, par lequel on divisera la troisiéme Differentielle, & le premier Produit trouvé. Des Restes qui résulteront de ces Divisions on fera deux Equations particulieres qu'on combinera & avec la Proposée, & avec les cinq autres Equations qu'on pourra faire en égalant séparément à zero chacun des Coefficiens de la premiere, & de la seconde Differentielle, & on tirera enfin de là & les valeurs des Coordonnées qui appartiendront au Lemnisceros cherché, & les six conditions d'où dépendra son existence.

Et si le Point eût dû être ou un Lemnisceros infiniment petit compliqué d'Inflexion, ou l'Osculation des Sommets d'une Parabole seconde Cubique & d'une Parabole ordinaire, en ce cas on auroit divisé de plus la quatrié-

me Differentielle ou par le premier, ou par le fecond des Produits trouvés tout à l'heure, & les Restes qui seroient provenus de ces Divisions étant égalés à zero, auroient fourni une nouvelle Equation à combiner avec les autres ci-dessus, & par conséquent une septiéme condition d'existence.

METHODE

Pour trouver les Points de Rebroussement de la troisiéme Espece, & desquels il a été parlé plus haut (voy. Pag. 137.).

On multipliera la quatriéme Differentielle Terme à Terme par les Termes d'une Progression Arithmétique dont zero soit un des Extrêmes, on fera la même Operation sur le Produit resultant de cette premiere Multiplication, & on la réiterera encore sur le

Produit qui proviendra de la seconde ; après quoi on divisera par le dernier Produit trouvé la quatriéme Differentielle, & les deux autres Produits, ce qui donnera trois Restes dont on fera autant d'Equations, & ces trois Equations on les combinera avec la Proposée & les neuf autres Equations qu'on pourra faire en égalant séparément à zero tous les Coefficiens des trois premieres Differentielles ; d'où il resultera & les déterminations des Coordonnées propres au Point cherché, & onze conditions d'où dépend son Existence, & ainsi des autres Points Singuliers.

On remarquera que dans toutes les occasions où nos Régles ont prescrit de faire des Equations de Restes on auroit pû trouver plus simplement encore ces Equations en comparant Terme à Terme à la plus haute Dif-

ferentielle qu'on a employée la Puiſſance analogue du dernier Produit trouvé ; par exemple dans le cas préſent on auroit comparé la quatriéme Puiſſance de ce Produit avec la quatriéme Differentielle, & ainſi des autres cas.

REMARQUE

Où l'on fait un Parallele des Méthodes qu'on vient de donner à celles que fournit le calcul Differentiel pour trouver les Points d'Infléxion, & les Points de Rebrouſſement, où l'on indique des moyens pour donner à celles-ci plus d'étenduë qu'il ne leur en avoit été encore donné, & où l'on détermine à quels Problêmes les nôtres peuvent s'appliquer.

Comme nous avons déja obſervé pluſieurs fois que les Differentiations faites à notre maniere étoient équivalentes à de

ſimples Transformations propres à tranſporter l'Origine de la Courbe dans un point quelconque de ſon Plan, nous croyons en conſéquence qu'il ſeroit ſuperflu de nous arrêter ici à prouver plus au long que les Méthodes que nous venons d'enſeigner en dernier lieu, bien qu'elles contiennent dans l'énoncé que nous leur avons donné des expreſſions Differentielles, ſont cependant déduites de la ſeule Analyſe de Deſcartes, & non des principes du Calcul Differentiel: cet énoncé ne leur étoit en effet nullement néceſſaire, & ſi nous nous fuſſions propoſés d'écrire un Ouvrage élémentaire, nous lui en aurions pû facilement ſubſtituer un autre où les expreſſions Differentielles n'auroient point été employées, établiſſant alors pour calculer d'une maniere nouvelle les Indéterminées de Deſcartes

des Régles analogues à celles qu'on connoissoit déja pour le Calcul Differentiel.

Ce qu'il pourroit être plus naturel de désirer ici ce seroit que nous y comparassions exactement, & en détail les Régles que nous avons données avec celles que le Calcul Differentiel auroit pû fournir pour le même usage, afin qu'on pût voir par là de quel côté se trouveroit l'avantage d'une plus grande simplicité, & d'une plus grande fécondité dans les principes, & en même tems d'une plus grande facilité dans l'exécution.

Nous entreprendrions en effet ce Parallele dans toute son étenduë, si les Auteurs qui ont écrit sur le Calcul Differentiel avoient donné, ainsi que nous l'avons fait expressément, ou que nous avons indiqué les moyens de le faire par induction, des Méthodes diffe-

rentes pour toutes les Especes imaginables de Points Singuliers, Simples, ou Multiples. Mais comme ces Auteurs se sont bornés au contraire aux Points d'Infléxion & de Rebroussement (si l'on en excepte cependant M. de Maupertuis, qui a donné pour trouver les Serpentemens & les Lemniscerons infiniment petits une Méthode dont nous parlerons plus bas, & que nous y démontrerons insuffisante): comme d'ailleurs ce seroit nous écarter de notre sujet que de chercher à tirer ici des principes du Calcul des Differences ce que n'en ont point déduit ceux mêmes qui ont traité *ex professo* de ce Calcul : enfin comme il seroit peut-être très-difficile d'y réussir, l'application de ces principes pouvant devenir dans les détails beaucoup moins naturelle que celle des nôtres ; nous nous trouvons

obligés par toutes ces raisons à nous contenter de donner à présent une ébauche de ce Parallele, qui pourra au reste nous fournir dans la suite le sujet d'un petit Ouvrage détaché, & assez intéressant.

Avant d'entrer en matiere il sera à propos qu'on se rapelle dans quelles sources ont été puisées les Régles qu'on trouve expliquées dans l'*Anal. des Infiniment petits de M. le Marquis de l'Hôpital, Sect. 4. Pag. 55. & suiv.* pour trouver les Points d'Inflexion, & de Rebroussement des Courbes.

Ce Géométre suppose tirées de tous les Points d'Infléxion & de Rebroussement des Tangentes qui se terminent toutes à un même Axe, & qui forment sur cet Axe autant de Soutangentes, entendant par ce terme la portion de Droite comprise sur l'Axe entre l'Origine & le point de ren-

contre de l'Axe & d'une Tangente quelconque. Ces Soutangentes il les compare avec les Abſciſſes correſpondantes, de façon que ces deux ſuites de Droites deviennent comme les Coordonnées d'une nouvelle Courbe, & il démontre que la Coordonnée repreſentée dans cette nouvelle Courbe par la Soutangente de l'autre Courbe, deviendra un *Maximum*, ou un *Minimum*, ſi cette Soutangente correſpond dans la premiere Courbe à un Point d'Inflexion, & de même que la Coordonnée de la ſeconde Courbe repreſentée par l'Abſciſſe de la premiere deviendra à ſon tour un *Maximum*, ou un *Minimum*, ſi cette Abſciſſe correſpond dans la premiere Courbe à un Point de Rebrouſſement.

Mais lorſqu'une quantité comparée à une autre qu'on ſuppoſe croître uniformément devient

plus grande, ou plus petite que toutes ses voisines, il s'ensuit que sa Difference doit devenir ou nulle, ou infinie par raport à la Difference de celle à laquelle on la compare, & M. de l'Hopital conclut de-là que dans le Point d'Inflexion la Difference de la Soûtangente doit devenir ou nulle, ou infinie par raport à celle de l'Abscisse, & qu'au contraire dans le Point de Rebroussement la difference de l'Abscisse doit devenir ou nulle, ou infinie par raport à celle de la Soûtangente.

Enfin l'expression générale de la Soûtangente étant $\frac{ydx - xdy}{dy}$ dont la Difference, en supposant dx constante, est $-\frac{ydxddy}{dy^2}$, on peut en tirer cette Régle générale que dans les Points d'Inflexion, pourvû qu'ils puissent être don-

nés par une *plus grande* Soûtangente, dd$y$ doit être nulle, ou infinie, par raport à $\frac{dy^2}{y}$, & que dans les Points de Rebroussement, s'ils peuvent être indiqués par une *plus grande* Abscisse correspondante à une Soûtangente infinie, dd$y$ doit être infinie, ou nulle par raport à $\frac{dy^2}{y}$: de plus si l'on se permet (ce qu'on ne peut cependant faire à la rigueur qu'en conséquence de quelques observations dont on parlera plus bas, & ausquelles il ne paroît pas qu'on ait fait jusqu'ici attention) si l'on se permet, dis-je, de négliger dans l'expression donnée ci-dessus de la difference de la Soûtangente le Diviseur $\frac{y}{dy^2}$, on changera par là l'énoncé de cette Régle en celui-ci, qui en

est en effet l'énoncé ordinaire, & même général, que dans les Points d'Infléxion, & de Rebroussement ddy doit être égale ou à zero, ou à l'Infini.

Cette même Régle peut se démontrer encore par la considération de la suite des secondes Differences des Ordonnées, en remarquant que dans les Points d'Infléxion, ou de Rebroussement ces Différences doivent passer du Positif au Négatif, ou du Négatif au Positif; passages qui ne peuvent se faire que par zero, ou l'infini: mais quoique cette preuve qu'on trouve encore dans le Livre de M. le Marquis de l'Hopital ait été depuis mise dans tout le jour dont elle étoit susceptible par l'illustre M. de Fontenelle (*voy. Géomet. de l'Inf. Part.* 1. *Sec.* 10, *&* 11.), cependant nous préférerons de nous arrêter à la premiere, parce qu'-

elle nous paroît plus féconde que l'autre pour faire découvrir les Especes differentes dont peuvent être les Infléxions, & les Rebroussemens trouvés, ainsi que les cas où pour venir à bout de les trouver il faut supposer ddy égale plutôt à zero qu'à l'infini, ou plutôt à l'infini qu'à zero.

Revenant donc à cette premiere preuve nous remarquerons deux choses à son sujet.

En premier lieu qu'elle est insuffisante pour les cas où la direction du Point Singulier doit être parallele à l'Axe; car la Soûtangente devenant alors infinie, elle ne peut à proprement parler être dite un *Maximum*, ou un *Minimum*, & ce n'est non plus qu'improprement qu'on pourroit dire que dans la seconde Courbe dont il a été parlé plus haut, & qui dans le cas présent auroit pour Assymptote sa propre Ordonnée, ou la

M. le Marquis de l'Hopital est en quelque façon *équivoque* jusqu'à ce qu'il ait été déterminé en quels cas il faut se servir par préférence de la supposition de $ddy = 0$, ou de la supposition de $ddy = \infty$; en effet si l'on se sert pour les Points d'Infléxion, par exemple, de l'une de ces suppositions seulement, on pourra reprocher que la Méthode employée pour trouver cette Espece de Points ne conviendra *nec omni* (puisqu'il est des Infléxions qui doivent se déterminer par la supposition contraire), *nec soli* (puisque cette supposition est encore propre à faire trouver des Points de Rebroussement), & si l'on prescrit au contraire l'alternative de l'une de ces deux suppositions sans marquer dans quelles occasions l'une d'elles doit être préferée à l'autre, il est évident que la Régle donnée devra dès-lors paroître peu satisfaisante. Que

Que ſera-ce donc ſi l'on vient à ſe convaincre, comme il eſt facile de le faire, que l'alternative de ces deux ſuppoſitions convient de plus non ſeulement aux Infléxions, & aux Rebrouſſemens de tous les Ordres, mais encore aux Serpentemens infiniment petits de tous les Ordres, & même à toutes les Eſpeces de Points Multiples à directions coincidentes? Quel labirinthe ne reſtera-t-il point à percer avant de pouvoir s'aſſurer dans des exemples un peu compliqués que le Point trouvé devra être de telle Eſpece plutôt que de telle autre?

Pour qu'il devienne plus facile de juger de ce travail nous en joindrons ici un foible eſſai.

Nous ferons donc remarquer d'abord généralement que les cas où l'on doit employer la ſuppoſition de ($ddy=0$) ſont ceux dans leſquels le *Maximum*, ou le *Minimum* de la ſeconde Courbe

ſont donnés par un Elément parallele à la Coordonnée correſpondante à celle qui devient *plus grande*, ou *plus petite*, au lieu que la ſuppoſition de ($ddy=\infty$) doit être au contraire employée lorſque ces *Maximum*, ou *Minimum* ſont donnés par un Point de Rebrouſſement d'une direction coincidente avec la Coordonnée qui devient elle-même *plus grande*, ou *plus petite*.

Donc, puiſque dans les Points d'Infléxion ordinaires, & dont la direction ne feroit point coincidente avec celle de l'une des Coordonnées, puiſque dans ces Points d'Infléxion à deux Abſciſſes infiniment peu differentes de celle qui eſt préciſément propre au Point d'Infléxion il correſpondroit une même Tangente, & par conſéquent auſſi une même Soûtangente, ou, ce qui eſt la même choſe, une même Ordonnée de la ſeconde Courbe, il

s'ensuit que de tels Points doivent toujours être donnés par la supposition de ($ddy = 0$).

Il n'en seroit point de même si la direction du Point d'Infléxion ordinaire eût dû être coincidente avec l'Ordonnée qui y auroit abouti ; en ce cas à *une même* Abscisse il auroit dû correspondre trois Tangentes coincidentes, & par conséquent trois Soûtangentes égales, ce qui auroit rendu égales dans la seconde Courbe trois valeurs d'Ordonnées correspondantes à une même Abscisse, & comme il n'en auroit point encore répondu d'autres égales aux Abscisses immédiatement suivantes, il s'ensuit que le *Maximum*, ou le *Minimum* de la seconde Courbe auroit dû être donné par un Point de Rebroussement ordinaire, & d'une direction coincidente avec l'Ordonnée qui y auroit abouti.

C'est ainsi que, l'Equation de

la premiere Courbe étant par exemple ($a^2 . \overline{x-a} = \overline{y-a}^3$.); laquelle donne à la Courbe un Point d'Infléxion dans la direction des y, & éloigné de l'Origine de la quantité a, tant sur l'Axe des y, que sur celui des x, l'Equation de la seconde Courbe, si l'on transporte son Origine dans le Point correspondant à l'Infléxion de la premiere, deviendra ($\overline{u+2z}^3 + 27\,uz^2 = 0$), qui suppose à sa Courbe dans son Origine, & dans la direction des u un Point de Rebroussement ordinaire.

Or de tout cela il suit qu'en général pour trouver les Points d'Infléxion paralleles à la ligne des y il faut faire à la fois dy, & $ddy = \infty$, caractere qu'on trouveroit convenir encore aux Rebroussemens ordinaires d'une direction coincidente avec celle des y, & même aux points ordinaires

dans une direction semblable.

Mais on distinguera ces trois Points les uns des autres si l'on fait attention que, le point ordinaire, & le Point d'infléxion étant des Points Simples, ils n'anéantiront dans la 1re Differentielle que le Coefficient de dy, au lieu que le Point de Rebroussement ordinaire, qui est un Point Double, rendra à la fois ces deux Coefficiens infiniment petits, quoiqu'à la verité de differens ordres.

De plus les dy convenables à ces trois Points doivent devenir respectivement infinis d'Ordres exprimés par des fractions qui ayent ou bien des nombres impairs pour Numerateur & pour Dénominateur, ou bien un nombre pair pour Numerateur, & un Nombre impair pour Dénominateur, ou bien enfin un nombre impair pour Numerateur, & un nombre pair pour Dénominateur.

Semblablement les fractions qui exprimeront l'Ordre d'Infini dont seront les ddy convenables à ces trois Points auront nécessairement pour Numerateur, & pour Dénominateur ou bien un nombre pair & un impair, ou bien deux nombres impairs, ou bien enfin un nombre impair & un pair, ce qui n'est qu'une suite de ce qui a été dit dans la Remarque sur le Lemme second.

Quant au Rebroussement ordinaire dans une direction parallele à la Ligne des x, il est facile de voir que pour le trouver il faut faire $dy = 0$, & $ddy = \infty$.

Mais, si sa direction ne devoit être parallele ni à la Ligne des x, ni à celle des y, alors pour le trouver il faudroit faire seulement $ddy = \infty$; car il doit dans ce Point répondre deux Soûtangentes égales, ou *presqu'égales* à une *même* Abscisse, & ainsi ce Point doit être donné par un Point or-

dinaire situé parallelement aux *y* dans la seconde Courbe dont il a été parlé ci-dessus.

On remarquera en passant que c'est par conséquent avec peu de fondement que l'Illustre M. Leibnits a assigné pour Caractere *général* des Points d'Infléxion que, *y*, & d*y* n'étant point $=o$, dd*y* soit pourtant $=o$ (*voy. Act. Erud. Lip.* 1684. *Nov. Met. pro Max. & Min.* &c. *Pag.* 468). Cet Auteur s'est encore mépris lorsqu'il a dit au même endroit que la Concavité vers l'Axe étoit marquée dans les Courbes par des d*y*, & des dd*y* de même Signe, & que la Concavité étoit désignée par des d*y*, & des dd*y* de Signe different. M. de Fontenelle a depuis établi solidement le sentiment contraire (*voy. Géom. de l'Inf. Art.* 769.).

Un raisonnement à peu près semblable aux précédens fourniroit des moyens de découvrir les

Lemniſceros infiniment petits ordinaires dans une direction differente de celle des deux Coordonnées. Quoique la Soûtangente de ces Points ne doive devenir ni un *Maximum*, ni un *Minimum*, cependant, ſi on regarde cette Soûtangente comme une Ordonnée de la ſeconde Courbe dont nous avons parlé plus haut, on s'appercevra aiſément qu'elle devra aboutir dans cette ſeconde Courbe à un Point d'Infléxion dont elle ſera à la fois Ordonnée, & Tangente, puiſque dans la premiere Courbe trois Soûtangentes infiniment peu differentes doivent répondre à *une même* Abſciſſe.

Donc pour trouver en général ces Points il faudra faire à la fois ddy, & $d^3y = \infty$ dans la Propoſée, & voir de plus ſi l'Expoſant Fractionnaire de l'Ordre d'Infini dont ſera ddy pourra avoir pour Numerateur un nombre

bre pair, & pour Dénominateur un nombre impair.

De même puisque dans les Serpentemens infiniment petits dans une direction non coincidente avec celle des Coordonnées une même Soûtangente doit correspondre à trois Abcisses infiniment peu différentes, il s'ensuit que ces Points doivent être indiqués par un Point d'Infléxion ordinaire situé dans la seconde Courbe parallelement à l'Axe des x; de sorte que pour les trouver il faudra faire à la fois d^2y, & $d^3y = o$ dans la Proposée.

De ces deux derniers Articles on peut conclure l'insuffisance des Méthodes qu'a données M. de Maupertuis dans celui de ses Ouvrages que nous avons déja cité plus haut (*voy. Pag.* 76) pour trouver les Lemniscéros, & les Serpentemens infiniment petits, & selon lesquelles il devroit

suffire pour cela de faire dans la Proposée $d^3y = \infty$, ou $= o$. Cette propriété ne caracterise pas plus les Points en question que ($ddy = o$) ne caracteriseroit les Infléxions paralleles à la Ligne des x en particulier, & en effet la condition ($d^3y = o$) se remplit généralement par quatre Ordonnées consécutives, dont les extrémités soient entr'elles comme les nombres premiers 1, 3, 6, 10, & ce n'est qu'en supposant encore $ddy = o$ qu'on peut faire naître entre ces quatre Ordonnées une Progression Arithmétique, ainsi qu'il doit arriver dans les Serpentemens infiniment petits.

Quant aux Points de Rebroussement, il est encore bien plus difficile à l'égard de ces Points qu'à l'égard des Points d'Infléxion de reconnoître les cas où il faut se servir pour les trouver de la

Formule ($ddy = \infty$) ; ou de la Formule ($ddy = o$) ; & comme ce seroit nous jetter dans une discussion trop longue que d'entreprendre de surmonter ici toutes ces difficultés nouvelles, bien que cependant il fût à la rigueur possible d'y réussir en s'y prenant d'une maniere analogue à la précédente, nous nous contenterons par cette raison du peu que nous avons dit sur les Points d'Infléxion pour faire entrevoir avec quelle délicatesse ces matieres doivent être traitées, si l'on veut pouvoir s'assurer qu'on y aura évité toute erreur.

Seulement observerons-nous de plus avant de finir cet Article qu'il se trouve une correspondance parfaite entre la Méthode que fournit le Calcul Differentiel, & celle que nous avons donnée nous-mêmes pour trouver les Points d'Infléxion. Dans la vûe de

découvrir les rapports de ces deux Méthodes il suffira de faire attention que les secondes Differentielles prises à la maniere ordinaire, & en supposant dx Constante sont composées du Double des secondes Differentielles prises à notre maniere, & du Produit de ddy par le Coefficient qu'a dy dans la premiere Differentielle. Donc lorsque ddy doit être $= o$, les secondes Differentielles prises à la maniere ordinaire doivent devenir précisément le Double des secondes Differentielles prises à notre maniere ; & comme celles-là forment toujours des Equations veritables, puisque la verité d'une Intégrale emporte celle de toutes ses Differentielles, il s'ensuit que dans les cas où $ddy = o$ celles-ci doivent devenir aussi des Equations veritables, & par conséquent que les ayant divisées par la premiere Differen-

tielle le Reste de cette Division peut être supposé $= 0$; d'où l'on peut conclure que notre Regle pour les Infléxions se démontre par les principes mêmes du Calcul Differentiel.

Il ne seroit point aussi aisé de démontrer par ces principes notre Régle pour trouver les Points de Rebroussement ordinaires, & on pourroit néanmoins, à en juger, pour ainsi dire, du premier coup d'œil, se persuader le contraire : en effet ddy étant égal de quantité au Double de la seconde Differentielle prise à notre maniere divisé par le Coefficient qu'à dy dans la premiere Differentielle, il paroîtroit qu'on seroit fondé à en conclure que lorsque le Coefficient de dy dans la premiere Differentielle doit devenir égal à zero, ce qui ne peut manquer d'arriver dans le Rebroussement, qui est un Point Multiple, dans

troisiéme Ordre dans lesquelles se trouvent des Points Doubles ; on peut leur donner ces trois Equations ($a.\overline{y+x}^2 = x^3$), ($ay^2 = ax^2 + x^3$), ($ay^2 = -ax^2 + x^3$) & dans les Differentielles de chacune de ces trois Equations si l'on fait $x = o$ (supposition qui doit avoir lieu dans le Point Double), & qu'on y substituë de même les valeurs que cela donnera pour y, dy, dy^2, les Quotiens de la Division ci-dessus deviendront respectivement pour les trois Courbes

$$\frac{o}{o^{\frac{1}{2}}} = o^{-\frac{1}{2}}, \frac{o}{o}, \frac{o}{o.\sqrt{-1}};$$ d'où il

suit qu'il n'y aura que la premiere de ces Courbes où ddy devienne $= \infty$, & il n'y a qu'elle aussi où le Point Double soit un Point de Rebroussement ; dans la seconde le Quotient est réel, & dans la troisiéme il est imaginaire,

parce que le Point Double est dans celle-ci un Point Conjugué, au lieu que dans celle-là c'est un Point de Croix.

Quant aux raisons qui ont fait que dans la seule Division propre au Rebroussement le Numerateur, & le Dénominateur sont devenus des infiniment petits de differens Ordres, ce seroit nous écarter trop de notre sujet que d'entreprendre de les donner ici, surtout n'ayant point précédemment éclairci la Méthode du Calcul Differentiel pour les Points de Rebroussement comme nous avions éclairci celle que donne ce Calcul pour trouver les Points d'Infléxions. Nous abandonnons en conséquence cette recherche à ceux de nos Lecteurs qui auront la curiosité, & la patience de la tenter, & nous venons au Parallele que nous avons promis au commencement de cette Remarque.

Qu'on se rapelle donc maintetenant tout-à-la-fois les difficultés qu'on trouve à se persuader pleinement de la généralité des Méthodes du Calcul Differentiel, celles qui se rencontrent d'ailleurs pour décider de laquelle des deux Formules il faut préférablement faire usage dans les cas particuliers, celles enfin qu'il faudroit surmonter si l'on se proposoit de donner par les principes des infiniment petits, & pour toutes les Espéces de Points Singuliers des Méthodes analogues à celles qu'on a découvertes par ces principes pour les Points d'Infléxion, & de Rebroussement ordinaires.

Qu'on joigne à cela les erreurs où l'on a vu qu'étoient tombés de grands Géométres pour avoir voulu juger de la nature des Points Singuliers, ou Multiples par ces principes peu faciles à ma-

nier; telles sont la suppôsition du prétendu Rebroussement de la seconde Espece dont nous avons parlé dans la Remarque sur le Lemme second, les fausses Regles pour trouver les Points Multiples que nous avons examinées dans le premier Corollaire de ce quatriéme Lemme, les Méthodes enfin pour les Lemnisceros, & les Serpentemens Infiniment petits que nous venons en dernier lieu de démontrer insuffisantes.

Qu'on fasse attention d'ailleurs que les principes de nos Méthodes ont été puisés pour ainsi dire dans la nature même des Points Singuliers considerés dans la situation la plus simple qu'il fût possible de leur donner, que pour en faire l'application nous n'avons employé qu'une Transformation Algebrique très facile, c'est-à-dire, celle qui augmente seulement d'une Indéterminée chacune des Inconnuës de l'Equa-

tion de la Courbe proposée, que les Méthodes que nous avons tirées de-là ont eu toutes des énoncés clairs, & non équivoques, qu'elles ont été differentes pour tous les differens Points, enfin que nos principes sont si féconds qu'étant proposé tel Point qu'on pourroit imaginer il nous seroit extrémement facile d'assigner sur le champ la Méthode dont il faudroit se servir pour le trouver.

Qu'on applique de plus successivement les anciennes Méthodes, & les nôtres à quelques exemples, ce qui fera voir qu'il faut le même tems pour trouver par les unes, ou par les autres un Point d'infléxion, ou de Rebroussement, & que les premieres feroient même plus longues s'il s'agissoit d'un Point d'un Ordre superieur de Multiplicité, ou de Singularité.

Et toutes ces choses étant considerées, & pesées ensemble il nous paroît qu'on ne pourra gué-

re hésiter à donner à celles-ci la préférence sur celles-là.

Ce qui pourroit peut-être balancer auprès de quelques personnes les avantages que nous venons de parcourir ce seroit la pensée que les Méthodes du Calcul des Differences s'étendroient à la Solution d'un nombre de Problêmes plus grand que celui auquel les nôtres pourroient atteindre.

A cela nous répondons 1°. que nous croyons pouvoir avancer generalement qu'à l'aide de nos Méthodes, ou de nos principes on doit venir à bout de résoudre par la simple Analyse de Descartes tous les Problêmes Géométriques qui seront tels que dans l'énoncé de leur *Question*, ou dans celui de leur *Résolution il ne pourra point entrer des Quantités Differentielles*, ce qui exclut à la verité du nombre de ceux auf-

quels nos Méthodes s'étendent en premier lieu tous les Problêmes de Calcul Integral, en second lieu tous ceux dont la Solution peut se donner par une Courbe Mécanique, tels que sont ceux où il s'agit d'assigner la nature des Dévelopées, en troisiéme lieu enfin, mais à quelques égards seulement, ceux où il s'agit de quelque *Effection* sur des Courbes Mécaniques ; nous disons à quelques égards seulement, parce que, les Differentielles prises à notre maniere étant assignables même dans ces Courbes, il s'ensuit qu'on y pourra déterminer les Tangentes, les Points d'infléxion... &c. ainsi dans la Cycloïde allongée dont l'Equation seroit ($\overline{7a - 3x}.dx = 3\sqrt{2ax - xx}.dy$), & où l'Arc de Cercle, & l'Ordonnée au Cercle auroient pour rapport celui des nombres 3, & 4, dans cette

Courbe si l'on prend à notre maniere la seconde Differentielle, & qu'on la compare à la premiere, il en viendra ($x = 1\frac{3}{4} a$), pour déterminer le lieu du Point d'Inflêxion, ainsi qu'il seroit venu de la supposition que dd$y$ eût été $= o$.

2°. Si les Problêmes de Calcul Integral ne peuvent être entierement résolus par la seule Analyse de Descartes, au moins est-il certain que cette Analyse employée à ces Problêmes d'une maniere jusqu'ici inconnuë peut en faciliter extrémement la Solution (nous nous reservons à justifier au long cette assertion dans un Ouvrage que nous donnerons par la suite sur ce sujet); & quant aux Problêmes dont la Solution se peut construire par des Courbes Mécaniques, si nos Méthodes ne les résolvent pas, au moins

font-elles connoître le plus souvent ce que la Solution de ces Problêmes pourroit contenir de plus essentiel, & de plus intéressant. Ainsi quoique nous ne puissions venir à bout par nos Méthodes de trouver l'Équation des Dévelopées qui peuvent être des Courbes Mécaniques, lors même que les Dévelopantes ne seroient que Géométriques, cependant elles nous suffisent pour connoître la Courbure des differens Points de la Proposée, & par conséquent aussi la longueur de ses differens Rayons de Dévelopée.

3°. Et c'est ici la partie de notre réponse qui mérite le plus d'attention, on ne doit point être surpris que nos Méthodes ne s'étendent point jusqu'à la Solution des Problêmes ausquels nous venons de dire qu'on les employeroit inutilement. Comme dans ces Méthodes il n'est question d'Expressions

d'Expressions Differentielles qu'-autant qu'elles sont supposées representer des Indéterminées finies, vouloir qu'elles satisfissent à des Questions dont l'énoncé, ou la Solution renfermeroit de veritables Expressions Differentielles ce seroit évidemment en attendre une chose qui répugneroit à leur nature. Mais cela n'empêche point qu'elles ne soient générales *pour découvrir les propriétés, ou affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres*, ce que nous nous sommes proposés dans le titre de cet Ouvrage, & cela n'empêche pas non plus que dans les occasions où elles peuvent être employées, elles ne puissent mériter la préférence sur celles des Infiniment petits, ou pour rapeller ici les termes dont nous nous sommes déja servis au commencement de cette Remarque, que dans ces occasions elles ne puis-

sent avoir sur celles-ci l'avantage d'une plus grande simplicité, & d'une plus grande fécondité dans les principes, & en même tems d'une plus grande facilité dans l'exécution.

Que si malgré les preuves qui nous ont porté à juger de cette sorte, des Lecteurs éclairés embrassoient le sentiment contraire, soumettant en ce cas nos lumieres aux leurs, & attribuant l'erreur où nous aurions été à une prévention aveugle pour notre propre Ouvrage, nous nous restraindrions à les prier d'excuser en nous, avec bonté, cette prévention qui ne feroit en effet que trop naturelle.

COROLLAIRE TROISIE'ME

Où l'on donne une Méthode abregée pour les cas où il ne s'agit de transporter l'Origine que dans un des Points de la Ligne des x*, ou de la Ligne des* y*, où l'on enseigne en conséquence à connoître les Assymptotes Curvilignes des Branches Hyperboliques des Courbes lors même que leurs Assymptotes Droites ne doivent point passer par leur Origine, où enfin l'on démontre* à priori *une propriété des Points d'Infléxion des Lignes du troisiéme Ordre qui avoit été déja démontrée autrement dans la Remarque premiere sur le Corollaire quatriéme du Lemme troisiéme* (voy. Pag. 225.).

Dans les cas où il ne s'agit de transporter l'Origine que dans un des Points ou assigné, ou même quelconque de la Ligne des x, ou

de celle des y, il eſt à propos de préferer la ſeconde ſuppoſition dont il eſt parlé à la Page 237 à la premiere dont il eſt auſſi parlé à la même Page ; c'eſt-à-dire, que dans ces cas il convient de faire repreſenter par x, & par y les deux Inconnuës z, & u de la Transformée, & par dx, ou dy la ſeule Indéterminée p, ou q, qui doit être employée dans la Transformation. La raiſon en eſt que s'y prenant de cette façon il ne ſera pas néceſſaire de Differentier à la fois les x, & les y ; mais on pourra dans les Differentiations traiter comme Conſtante la premiere, ou la ſeconde de ces deux Inconnuës, ſelon que ce ſera ſur la Ligne des Coordonnées exprimées par la ſeconde, ou par la premiere qu'on voudra tranſporter l'Origine.

Or c'eſt en cela que conſiſte l'Abregé que nous avons annoncé dans le titre de ce Corollaire ; de

façon que dans les cas dont nous venons de faire mention la Régle pour le transport d'Origine peut s'énoncer en cette sorte : qu'on prenne à notre maniere la Somme des Differentielles de la Proposée, regardant dans la Proposée y, ou x comme Constante, selon que ce sera sur la Ligne des x, ou sur celle des y qu'on voudra reculer, ou avancer l'Origine, & cette Somme des Differentielles de la Proposée representera elle-même la Transformée qu'on cherchera si l'on suppose que la Difference qui y sera employée represente la distance de l'Origine ancienne à l'Origine nouvelle; de maniere que sa valeur, si elle étoit d'abord indéterminée, puisse être déterminée par la connoissance des propriétés que doit avoir la nouvelle Origine.

Entre plusieurs usages ausquels cet Abregé pourroit être employé

il est sur tout extrémement utile pour faire connoître promptement les Assymptotes Curvilignes des Branches Hyperboliques des Courbes lorsque leur Assymptotes Droites ne doivent point passer par leur Origine, cas auquel n'avoient pû s'étendre les Méthodes que nous avons données plus haut (*voy. Pag.* 160, *& suiv.*).

Pour en venir à bout on transportera d'abord l'Origine dans un Point quelconque de la Ligne des x : on supposera ensuite que les deux plus hauts Rangs de la Transformée ayent un Diviseur Commun, & par cette supposition on déterminera les valeurs de dy propres à la remplir. Cela fait on examinera si le Diviseur trouvé ne divisera point encore le troisiéme Rang, ou même plusieurs des Rangs immédiatement inferieurs aux deux plus hauts, & appliquant ici les principes répandus

dans le Corollaire 4me du Lemme 3me on concluëra que l'Assymptote Courbe sera d'un Ordre d'Hyperbolisme plus ou moins élevé, & semblablement qu'elle sera de telle ou telle forme, selon qu'un plus ou moins grand nombre des Rangs inferieurs de la Transformée, à commencer du troisiéme, pourront devenir $= o$ par la même supposition qui rendra tels les deux plus hauts.

Par conséquent si ce Diviseur commun au premier, & au second Rang ne divisoit de plus que le troisiéme, l'Assymptote Courbe seroit une Hyperbole Cubique considerée par rapport à ses deux Branches divergentes, & elle auroit une Equation de cette forme ($xyy = a^3$), au lieu que si ce Diviseur eût encore été commun au quatriéme Rang en descendant, & non au cinquiéme, l'Assymptote Courbe auroit eu une

Equation de cette autre forme ($xy^3 = a^4$), & au contraire ç'auroit été une Hyperbole ordinaire, ou Conique si le Diviseur en question n'eût absolument divisé que le premier, & le second Rang, & ainsi des autres cas ausquels nous ne nous arrêterons pas, parce qu'il est maintenant infiniment facile de faire dans tous ces cas l'application des principes que nous avons démontrés dans le Corollaire quatriéme du troisiéme Lemme.

Afin cependant qu'on puisse s'exercer un peu dès-à-présent dans la Transformation que nous venons d'enseigner, & dont nous nous servirons encore utilement dans le Corollaire suivant, nous allons démontrer ici par son moyen, & *à priori*, une proposition sur les Points d'Infléxion des Lignes du troisiéme Ordre que la Théorie des Ombres nous a donné

né occaſion de découvrir, & dont nous avons parlé en conſéquence à la Page 225 de cet Ouvrage: voici quel eſt ſon énoncé.

Si une Droite qui rencontre une Ligne du troiſiéme Ordre en trois points paſſe par deux des Points d'Inflexion de cette Courbe, le troiſiéme point où elle la rencontrera devra être encore un Point d'Infléxion.

Mais ſi cette Droite ne rencontre la Courbe qu'en deux points qui ſoient tous deux des Points d'Infléxion ; elle devra dès-lors être parallele ou à la derniere direction de deux Branches Paraboliques Divergentes , ou à l'Aſſymptote Droite de deux Branches Hyperboliques Divergentes , & ſituées d'un même côté par raport à cette Aſſymptote, à la maniere de celles qui ſont auſſi Divergentes dans l'Hyperbole Cubique.

Pour démontrer la premiere partie de cette Propoſition nous ſuppoſerons d'abord que la Ligne des y ſoit cette Droite qui doit rencontrer la Courbe en trois points dont deux ſoient des Points d'Infléxion : nous placerons de plus l'Origine dans un de ces Points d'Infléxion, & nous nommerons a, & b ſes diſtances des deux autres Sommets; enſorte que, ſi on ordonne l'Equation par rapport à x, mais ſans délivrer x^3 de ſon Coefficient, ſon dernier Terme pourra avoir cette forme ($y^3 \overline{-a-b}. y^2 + aby$); enfin nous nommerons $-cc$ le Coefficient que x Lineaire doit avoir dans l'Equation, d'où il ſuivra que la Racine qu'on pourra tirer du plus bas des Rangs Horizontaux réduit en Equation devra être ($y = \frac{cc}{ab} x$). Or l'Origine étant un Point d'Infléxion, cette Racine

devra diviser le Rang immediatement superieur réduit aussi en Equation, & par conséquent, si l'on prend ($y = \frac{r}{a+b} . x$) pour l'autre diviseur de ce Rang, il aura nécessairement cette forme ($\overline{-a-b}. y^2 + \overline{\frac{\overline{a+bb}.cc}{ab} + r}. xy + \frac{rcc}{ab}. xx$). Quant au plus haut Rang Horizontal, ses Coefficiens, à l'exception de celui de y^3 qu'on a déja fait $= 1$, pourront être quelconques, & ainsi on pourra leur donner cette forme ($y^3 + fxy^2 + gx^2y + hx^3$); & pour le plus bas de tous, il doit nécessairement manquer, puisque l'Origine est dans la Courbe.

Tout cela supposé on transportera l'Origine dans un des deux autres Sommets, & pour cela on Differentiera à notre maniere l'Equation, en y regardant

x comme Conſtante, & ſubſtituant à meſure qu'on operera ou la lettre a, ou la lettre b à la place de dy.

On ſuppoſera enſuite que ce nouveau Sommet (celui par exemple où on ſera parvenu par la ſubſtitution de a en la place de dy) ſoit encore un Point d'Infléxion, ce qui rendra $= 0$ le Reſte qui proviendra de la Diviſion du troiſiéme Rang Horizontal de la Transformée par le ſecond, comptant les Rangs de bas en haut.

Or après un calcul aſſez long, il viendra de là la Formule ſuivante:

$$(\overline{aa-ab+bb}.\ c^4+\overline{\overline{r-fa}.\ a+}$$

$$\overline{\overline{r-fb}.\ b}.\ ab.\ c^2-g.\ \overline{\overline{a-b}^2+\overline{r-fa}}$$

$$\overline{\overline{r-fb}}.\ a^2b^2=0).$$

Et ſi dans cette Formule on changeoit a en b, & b en a, il

eſt évident qu'elle repreſenteroit celle qu'on auroit dû avoir ſi l'on avoit dans la Transformation ſubſtitué non *a*, mais *b* à la place de d*y*, c'eſt-à-dire, ſi l'on avoit tranſporté l'Origine non dans le ſecond, mais dans le troiſiéme Sommet, & qu'on eût ſuppoſé une Infléxion à ce troiſiéme Sommet.

Mais ce changement de *a* en *b*, & de *b* en *a* n'en produiſant aucun dans la Formule ci deſſus, il s'enſuit (& c'eſt ce qu'il falloit démontrer) que la même condition qui donneroit une Infléxion au ſecond Sommet en donneroit auſſi néceſſairement une au troiſiéme.

Pour la ſeconde partie de notre Propoſition elle ſe ſubdiviſe en deux autres; car la Ligne des *y* (que nous ſuppoſons toujours être celle qui joindra les Points d'Infléxion) ne rencontrant la

Courbe qu'en deux points, & le Terme y^3 manquant par conséquent dans l'Equation, il peut se faire que les Branches Infinies ausquelles les y devront être paralleles soient ou Paraboliques, ou Hyperboliques.

Dans l'un & l'autre de ces deux cas nous placerons encore l'Origine dans un des Points d'Infléxion, & nous nommerons a la distance d'un Point d'Infléxion à l'autre, en sorte que le dernier Terme de l'Equation ordonnée par rapport à x, mais sans en ôter le Coefficient de x^3, pourra avoir cette forme ($-ay^2 + aay$); de plus nous nommerons, ainsi que nous l'avons fait ci-devant, $-cc$ le Coefficient que x Linéaire devra avoir dans l'Equation, & la Racine qu'on pourra tirer du second Rang Parallele réduit en Equation sera ($y = \frac{cc}{aa}x$), laquelle devra diviser aussi le Rang immé-

daitement ſuperieur réduit pareillement en Equation. Enfin ſi l'on prend ($y = \frac{r}{a} x$) pour l'autre Diviſeur de ce Rang, il devra conſéquemment avoir cette forme ($\overline{-ay^2 + \frac{cc}{a} + r.}\ xy - \frac{rcc}{aa} xx$).

Paſſant maintenant au premier des deux cas que nous venons de diſtinguer, un peu d'attention ſuffira pout faire appercevoir que le membre fxy^2 du plus haut Rang Parallele devra y manquer, de même que le membre y^3, qui manque généralement dans les deux cas, & ainſi il eſt déja prouvé que le plus haut Rang ne pourra comprendre dans le cas préſent que les parties gx^2y, hx^3.

Or ſi l'on tranſporte, comme on a fait ci-deſſus, l'Origine dans le ſecond Sommet, & qu'on ſuppoſe dans la Transformée convenable à ce tranſport que les

deux Rangs inferieurs ſoient diviſibles l'un par l'autre, il naîtra de-là une Equation qui ſe pourra réduire à ($-ga^3 = o$), ce qui fera conclure que dans ce cas g devra être $= o$, & qu'ainſi, le membre gx^2y manquant encore dans le plus haut Rang Horizontal, les deux Branches Paraboliques auſquelles les y ſeront paralleles ne pourront être que Divergentes.

Dans le ſecond cas on fera ſucceſſivement deux Transformations, l'une propre à tranſporter l'Origine dans le ſecond Sommet, & ſuppoſant que ce ſecond Sommet ſoit un Point d'Infléxion, il en viendra cette Equation de condition ($\overline{g+ff}.\,aa = \overline{f.\,ab+cc}$).

L'autre Transformation, qui ſe fera en traitant y comme Conſtante dans les Differentiations, & ſubſtituant $\frac{z}{y}$ en la place de dx,

ſervira à tranſporter l'Origine ſur la Ligne des x dans le point où cette Ligne eſt coupée par l'Aſſymptote Droite parallele aux y.

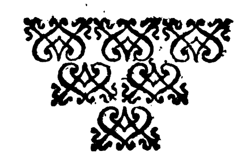
Or dans cette derniere Transformée, outre qu'il y manquera le membre où y^2 auroit un Coefficient Conſtant, y Linéaire y aura de plus pour Coefficient Conſtant $\frac{(f^2 a^2 + ga^2 - fc^2 - fab.)}{ff}$; de maniere que le membre où y Linéaire pourroit avoir un Coefficient Conſtant diſparoîtra encore ſi $\overline{g + ff}.\ aa$ devient $= f.\ \overline{ab + cc}$. Mais, ſi ce membre vient encore à diſparoître, on a vû plus haut que les Branches Hyperboliques deviendroient Divergentes à la maniere de celles qui ſont auſſi Divergentes dans l'Hyperbole Cubique. Donc de telles Branches

sont renduës nécessaires par la même condition qui donne une Infléxion au second Sommet, ce que nous avions à démontrer en dernier lieu.

Quoique la Démonstration précédente soit un peu longue, nous croyons cependant qu'on appercevra sans peine que voulant la faire directe, & *à priori* il ne nous étoit point possible de lui donner moins d'étenduë. Cette espece de défaut qu'on pourroit lui reprocher doit nous donner de plus occasion de remarquer les avantages des moyens de démontrer que nous avons indiqués ci-dessus (*voy. Pag.* 224), & par lesquels on peut, ainsi qu'on l'a vû, prouver en peu de lignes une verité dont la démonstration directe demanderoit de longs calculs.

Que si on attribuoit cette briéveté extrême de la preuve que

nous avions déja donnée plus haut à ce que nous y avions supposé une Proposition que M. Newton avoit annoncée, & dont on pourroit imaginer que la démonstration directe auroit aussi été fort difficile, en ce cas le Corollaire suivant, à la fin duquel nous démontrerons directement, & sans peine cette même Proposition de M. Newton, suffiroit pour persuader du contraire.



COROLLAIRE QUATRIE'ME

Où l'on enseigne à donner aux Ordonnées d'une Courbe une situation quelconque par rapport à leur Axe, où l'on donne en conséquence des moyens pour distinguer les unes des autres les Osculations de Sommets Paraboliques à Parametres réels, ou imaginaires, de même Signe, ou de Signe different, comme aussi les Assymptotes coincidentes de deux Paires de Branches Hyberboliques à Puissances réelles, ou imaginaires, de même Signe, ou de Signe different, où enfin l'on démontre la Proposition de M. Newton, de laquelle on vient de parler à la fin du Corollaire précédent, ce qui donne lieu à quelques réfléxions sur un Ouvrage de M. Nicole.

Nous avons déja remarqué plusieurs fois, & nous avons prouvé au commencement de cet Ou-

vrage que, pour donner aux y d'une Courbe une ſituation quelconque relativement à la Ligne des x, il ſuffiſoit d'y ſubſtituer $z +$ nu, & mu à la place de x, & de y (n, & m étant deux nombres indéterminés quelconques, & n en particulier pouvant être indifferemment poſitif, ou négatif). Or cette ſubſtitution pourra ſe faire auſſi au moyen des Differentiations, & de la maniere que nous venons d'enſeigner dans le dernier Corollaire, ſi l'on regarde dans l'Opération y comme Conſtante, & qu'à meſure qu'on operera on écrive par tout nu, mu, & z à la place de x, y, & dx.

Que ſi l'Angle de transformation, c'eſt-à-dire, celui que doivent faire ſur l'Axe les Ordonnées nouvelles, ſi cet Angle étoit donné, comme alors dans le Triangle formé par les Côtés u, nu, mu, ou, ce qui eſt la même choſe,

par les Côtés 1, *n*, *m* on connoîtroit tous les Angles, & le Côté 1, on en déduiroit facilement la valeur des deux autres Côtés *n*, *m*.

Mais si la quantité de cet Angle devoit au contraire être déterminée par son *aptitude* à faire manquer dans la Transformée tel, ou tel des Termes, ou telle partie d'un des Termes qu'elle pourroit avoir, en ce cas supposant nuls dans la Transformée générale le Terme, ou la partie de Terme en question, on viendroit d'abord à bout de connoître quel rapport de *n* à *m* seroit propre à l'anéantir en effet, & on tireroit de-là une valeur de *m* en *n*, ou de *n* en *m*.

De plus, ayant ainsi des valeurs des trois Côtés du Triangle dont nous venons de parler, dans lesquelles il n'y auroit qu'une seule Indéterminée d'employée, on en déduiroit une valeur semblable

pour le Sinus de l'Angle des Coordonnées anciennes, & la comparant avec la veritable valeur de ce Sinus, qui est toujours supposée connuë, on détermineroit en conséquence la seule Indéterminée qui seroit restée à déterminer.

Le principal usage que nous tirerons de cette Méthode consistera à porter à leur perfection celles que nous avons données ci-dessus dans le troisiéme, & le quatriéme Corollaire du troisiéme Lemme. Il restoit pour cela à donner des moyens de discerner les unes des autres les Osculations de Sommets Paraboliques à Paramétres réels, ou imaginaires, de même Signe, ou de Signe different, aussi bien que les Assymptotes coincidentes de deux Paires de Branches Hyperboliques à Puissances réelles, ou imaginaires, de même Signe, ou de Si-

gne different. Or si on change par la Méthode que nous venons d'indiquer la situation des Ordonnées de façon qu'elles deviennent paralleles ou à la Tangente de l'Osculation dont on cherche à connoître les Paramêtres, ou bien à l'Assymptote Multiple des Branches de laquelle on veut connoître les Puissances, la Transformée provenante contiendra avec d'autres membres ceux en particulier qui devront donner la valeur de *u* correspondante à une Abscisse ou nulle, ou infinie, ou, ce qui est la même chose, ceux par lesquels on devra juger de la nature, du Signe, & de la quantité des Paramêtres, ou des Puissances dont nous venons de parler.

Comme dans les Exemples que contiendra la troisiéme Section de cet Ouvrage nous aurons plusieurs occasions de nous servir de la Méthode de ce Corollaire, nous

nous

nous contenterons par cette raison d'en joindre ici un second usage au premier que nous venons d'y indiquer.

Ce sera de démontrer par son moyen la Proposition de M. Newton que nous avons supposée dans la Remarque premiere sur le Corollaire quatriéme du troisiéme Lemme (*voy. Pag.* 224), & dont il a été encore parlé en dernier lieu à la fin du Corollaire précédent : voici quel est son énoncé.

Dans les Hyperboles Redundantes du troisiéme Ordre des Lignes, c'est-à-dire, dans celles dont la nature peut s'exprimer par l'équation suivante ($xyy + ey = + ax^3 + bx^2 + cx + d$) les conditions qui peuvent donner un Diamétre aux Ordonnées paralleles à l'une des trois Assymptotes sont que e soit $= 0$, ce qui en donne

E e

évidemment un aux y elles-mêmes, ou bien que $bb-4ac$ soit $= \pm 4ac\sqrt{a}$; d'où il suit que si les Ordonnées paralleles à deux des trois Assymptotes doivent avoir Diamétre, celles qui seront paralleles à la troisiéme devront aussi en avoir nécessairement, puisque de ces trois Equations de Condition ($e=o$), ($bb-4ac=+4ac\sqrt{a}$), ($bb-4ac=-4ac\sqrt{a}$) deux ne peuvent être vrayes sans que la troisiéme le soit pareillement.

Pour démontrer cette Proposition on fera sur l'Equation proposée la Transformation que nous venons d'enseigner, & la Transformée provenante, si l'on y suppose nul le Coefficient que n^3 pourroit y avoir, deviendra (n^2. $\overline{2az+b}$. $u^2 + n$. $\overline{3az^2+2bz+c \pm e\sqrt{a}}$. $u + az^3 + bz^2 + cz + d$

$= 0$), qui exprime par conséquent l'Equation convenable aux Ordonnées paralleles à la seconde, & à la troisiéme Assymptote.

Or, lorsque les *u* devront avoir un Diamétre, le Coefficient du second Terme divisé par celui du premier ne devra contenir que des *z* Linéaires, & des grandeurs Constantes, puisqu'il faudra qu'il puisse être rendu nul par une seule Transformation d'Axe, & il suit de-là qu'on trouvera les conditions qui peuvent donner un Diamétre aux *u*, si l'on suppose égal à zero le Reste que donnera cette Division immédiatement après qu'il sera venu à son Quotient des *z* Linéaires, & des grandeurs Constantes, c'est-à-dire, immédiatement après qu'on aura trouvé les deux premiers Termes de la Suite Infinie que la même Division continuée donneroit pour la valeur de son Quotient.

Qu'on faſſe donc la Diviſion que nous venons d'indiquer, & le Reſte qui viendra après avoir mis deux Termes au Quotient étant ($c + e\sqrt{a - \frac{bb}{4a}}$), ſi on fait ce Reſte égal à zero on pourra en conclure l'Equation ($bb - 4ac = \pm 4ae\sqrt{a}$) qui renfermera les conditions par l'exiſtence deſquelles les Ordonnées paralleles aux nouvelles Aſſymptotes doivent acquerir des Diamétres. Or c'eſt préciſément la même Equation dont nous nous étions propoſés de démontrer la verité, & ainſi nous pouvons inferer de-là que M. Newton a avancé avec fondement la Propoſition dont l'énoncé a été raporté ci-deſſus.

La démonſtration précédente peut nous fournir une preuve de la ſupériorité de la Méthode indiquée dans ce Corollaire ſur celles qu'on pourroit lui ſubſtituer.

pour en tirer les mêmes uſages. Il ſuffira pour s'en convaincre de comparer cette démonſtration à celle que M. Nicole, l'un des illuſtres Membres de l'Académie Royale de Paris, a donnée de la même verité dans un Ouvrage qu'il a compoſé en l'année 1729,* & dont on attend depuis ce tems la continuation. Quoique cet Académicien ait ſuppoſé pour diminuer ſon travail les Coordonnées Rectangles, néanmoins ce n'eſt qu'au moyen d'un calcul qui remplit deux pages *in-4°* qu'il vient à bout de déterminer les conditions qu'il cherche.

L'occaſion que nous avons eu de parler de ſon Traité nous donne auſſi celle d'avertir ceux de ſes Lecteurs que pourroit ſédui-

* Voy. Memoires de l'Acad. Royale des Sciences de Paris ann. 1729, pag. 217, Edit. de Paris.

re le préjugé de sa reputation qu'il s'est glissé dans l'*Art.* 30 de son Ouvrage une faute d'une assez grande conséquence. L'Auteur y suppose que l'Ovale dans un Systême de Lignes du troisiéme Ordre peut s'unir à l'Hyperbole Ambigéne pour former un Nœud avec elle, ainsi qu'elle peut le faire en effet avec la Circonscripte. Or il est facile de se convaincre par la seule inspection des Figures & que l'Ovale ne peut sortir du Triangle des Assymptotes, puisqu'elle doit même être contenuë dans celui que formeroient les Tangentes des trois Points d'Infléxion, & en second lieu que l'Hyperbole Ambigéne doit être toute inferieure à l'Assymptote à laquelle elle est inscripte, d'où il suit que cette Hyperbole ne peut entrer dans le Triangle des trois Assymptotes. On pourroit au reste désirer dans l'Ou-

vrage dont nous parlons qu'on y eût expliqué pourquoi, lorsque l'Ordonnée d'une Courbe est prise parallele à la derniere direction d'une Branche Infinie, la Lettre qui l'exprime dans l'Equation de cette Courbe doit y perdre au moins une Dimension, & pourquoi les Equations qui sont de cette forme ($auu = \overline{bzz + cz + d}. u + \ldots$ &c.), ou bien de cette autre ($\overline{bzz + cz + d}. u = ez^3 + fz^2 \ldots$ &c.) se rapportent au premier des quatre cas généraux distingués par M. Newton dans son Traité des Lignes du Troisiéme Ordre.



COROLLAIRE CINQUIE'ME

Où l'on enseigne à transporter l'Origine dans un point quelconque du Plan de la Courbe, & à assigner tout-à-la-fois la valeur de l'Ordonnée primitive dans une situation quelconque ; ce qui pourroit conduire à découvrir pour déterminer les Espéces des Points Multiples, ou Singuliers les mêmes Méthodes que nous avons données dans le premier, & dans le second Corollaire de ce Lemme.

Il est évident qu'on viendra à bout de ce qu'on se propose dans ce Corollaire si l'on prend de la maniere que nous avons indiquée dans ce Lemme la Somme de toutes les Differentielles de la Proposée, qu'on suppose que x, & y y representent p, & q, que dx, & dy y representent n, & m, & qu'on multiplie enfin chaque Differentielle

Differentielle par la Puiſſance de *u* qui aura le même Expoſant que cette Differentielle, ou, ſi l'on aime mieux, qu'on ſuppoſe que dx, dy repreſentent *nu*, *mu*.

Et ſi l'on rapelle ici ce que nous avons dit dans le Corollaire ſecond du troiſiéme Lemme, il ſe préſentera un nouveau moyen de démontrer les Méthodes que nous avons données ci-deſſus pour déterminer les Eſpeces des Points Singuliers plus direct encore que le premier, en ce qu'il ne ſuppoſera point les proprietés des Points Singuliers ſitués dans l'Origine, mais qu'il les démontrera en même tems qu'il conduira à tranſporter généralement l'Origine dans ces Points.

COROLLAIRE SIXIE'ME

Où l'on enseigne à changer à la fois, & généralement les directions des deux Coordonnées.

Il est évident qu'on viendroit à bout de rendre à la fois quelconques les directions des deux Coordonnées, si après avoir substitué $z + nu$, & mu à la place de x, & de y dans la Proposée, on substituoit de nouveau dans la Transformée provenante de cette premiere substitution $s + gr$ à la place de u, & hr à la place de z (g, & h marquant des nombres indéterminés dans les mêmes conditions que n, & m, & s, & r exprimant les dernieres Coordonnées).

Mais ces deux Transformations pouvant se réduire à une seule, par laquelle on substituëroit tout d'un coup dans la Proposée $ns + \overline{ng + h}.\, r$ en la place de x,

& $ms + mgr$ en la place de y, il ſuit de-là que l'Equation faite de la Somme des Differentielles de la Propoſée, & à la maniere qui a été décrite ci-deſſus repreſentera celle qu'on cherche, ſi l'on ſuppoſe que x, y, dx, & dy y ayent reſpectivement pour valeurs ns, ms, $\overline{ng+h}.\,r$, mgr.

Et à ce ſujet il eſt à propos d'obſerver en paſſant que des quatre nombres indéterminés n, m, g, h, dont le premier & le troiſiéme peuvent être poſitifs, ou négatifs, ſi trois viennent à être déterminés, le quatriéme doit auſſi néceſſairement l'être, puiſqu'on peut prouver qu'il y a toujours entr'eux l'Egalité ſuivante.

$$\sqrt{(\overline{n-m+1}.\,\overline{n+m-1}.\,\overline{g-h+1}.\,\overline{g+h+1})} + \sqrt{(\overline{n+m+1}.\,\overline{-n+m+1}.\,\overline{-g+h+1}.\,\overline{g+h-1}.)} = 2\sqrt{(\overline{\overline{1+h+n-m}.\,g} - \overline{\overline{1+h+n+m}.\,g})}$$

REMARQUE PREMIERE

Où, après avoir découvert quelle est la Transformation la plus générale qu'on puisse faire sur les Equations des Courbes (leurs Coordonnées demeurant toujours droites), on prouve que toutes les Equations qui ont un même Lieu sont nécessairement d'un même Degré.

Il est presqu'inutile d'avertir ici qu'après avoir fait dans la Proposée le transport général d'Origine dont il a été parlé dans ce Lemme on peut de nouveau changer dans la Transformée provenante la direction de l'une des Coordonnées, ou même les directions des deux Coordonnées, à la fois de la maniere qu'on l'a enseigné dans le 4me, & le 6me Corollaire, ce qui donnera une seconde Transformée, qui, convenant à toutes les Origines ima-

ginables, ſera propre encore, ou bien à toutes les ſituations d'Ordonnées qui peuvent avoir lieu ſur un même Axe, ou bien à la fois à tous les Axes, & à toutes les Ordonnées poſſibles.

Mais ce qu'il importe ſur-tout de remarquer; c'eſt que la derniere de ces Transformations eſt la plus générale qu'on puiſſe faire ſur les Equations des Courbes, ſi l'on veut leur conſerver toujours des Coordonnées droites. En effet toute Equation à Coordonnées droites, & qui devroit avoir un même Lieu que la Propoſée ne pourroit differer d'avec elle que de deux façons, ou en ce que l'Origine de l'une ſeroit dans un autre point que l'Origine de l'autre, ou bien en ce que la direction d'une des Coordonnées, ou même des deux Coordonnées à la fois ne ſeroit point ſemblable pour ces deux Equations.

Et comme les Lettres qui expriment les nouvelles Coordonnées ne se trouvent que Linéaires dans les valeurs de x, & de y propres à cette Transformation, il suit de-là que la Transformée doit être précisément du même Degré que la Proposée, c'est-à-dire, que toutes les Equations qui ont un même Lieu sont nécessairement d'un même Degré.

REMARQUE SECONDE.

Où l'on découvre une espece de faute qu'il paroîtroit qu'on pourroit reprocher aux Auteurs qui ont écrit jusqu'ici sur la Construction des Lieux Géométriques, & où l'on fait voir que cette faute n'a cependant point dû tirer à conséquence dans les Régles, ou les Méthodes que ces Auteurs ont données.

De ce que nous avons dit dans la Remarque précédente il est facile de conclure que c'est la se-

conde, & non la premiere des deux Transformations dont nous y avons parlé qu'il faudra employer lorsqu'on se proposera de trouver une Formule générale qui contienne toutes les Equations convenables à un Lieu Géométrique Proposé. Cependant les Auteurs dont nous avons connoissance, & qui ont écrit sur la Construction des Equations par les Lieux Géométriques * s'en tiennent tous à la premiere de ces Transformations, c'est-à-dire, qu'ils se contentent de changer l'Origine, & l'une des Coordonnées seulement, ensorte que les valeurs qu'ils donnent à x, & à y, au lieu d'être ($x = p + ns + \overline{ng + h.}\, r$), ($y = q + ms + mgr$), sont seulement ($x = p + z + nu$), ($y = q + mu$), & malgré cela les

* M. le Marquis de l'Hopital, M. de la Hire, le P. Reyneau, . . &c.

Formules qu'ils donnent sont bonnes, & générales pour les Sections Coniques qui sont les seuls Lieux qu'ils se soient proposés de traiter.

Pour en découvrir la raison il faut remarquer en premier lieu que dans les Sections Coniques il n'est aucun Systême possible d'Ordonnées auquel on ne puisse supposer un Diamétre, si l'on en excepte seulement dans l'Hyperbole les Ordonnées paralleles aux deux Assymptotes, & dans la Parabole les Ordonnées paralleles à l'Axe, & qui sont toutes elles-mêmes des Diamétres.

En second lieu on observera encore que l'Equation des Sections Coniques prise par raport à tel qu'on voudra des Diamétres a toujours une même forme.

Etant donc Proposée dans les Sections Coniques une situation

quelconque de Coordonnées pour en trouver l'Equation par le moyen de l'Equation qu'on connoît pour les Ordonnées au grand Axe de la Section, au lieu de rapporter cette situation à l'Axe lui-même, on peut la rapporter au Diamétre qui coupe en deux également les Ordonnées même de cette situation, & dont l'Equation est nécessairement de même forme que celle de l'Axe, & pour lors il suffira de changer la direction des Abscisses seulement, au lieu qu'il auroit fallu changer à la fois les directions des Abscisses, & des Ordonnées si l'on avoit voulu rapporter à l'Axe même de la Section la situation proposée.

Aussi l'Equation qu'on trouve par-là est-elle insuffisante pour le cas où, le Lieu étant une Hyperbole, les nouvelles Coordonnées doivent être paralleles à ses

deux Aſſymptotes : on eſt obligé de donner pour ce cas une Formule particuliere, & cela n'arriveroit pas ſi la Formule qu'on avoit d'abord aſſignée avoit été en effet la plus générale qu'il fût poſſible, ou ſi on avoit fait la ſubſtitution de $p + ns + ng + h.r$ à la place de x, & de $q + ms + mgr$ à la place de y, & non pas ſimplement celle de $p + z + nu$ au lieu de x, & de $q + mu$ au lieu de y.

Quant aux Coordonnées de l'Hyperbole dont l'une ſeulement ſeroit parallele à une Aſſymptote, & à celles de la Parabole dont l'une ſeroit parallele à l'Axe, leur Syſtême peut, même par les Méthodes Ordinaires, ſe raporter à l'Equation des deux Axes de la Section, parce que dans ce Syſtê-

me l'une des Coordonnées eſt ſuſceptible de Diamétre.

Et comme les Obſervations que nous avons faites tout à l'heure ſur les Sections Coniques n'ont point lieu de même dans les Lignes d'un Ordre plus élevé, il s'enſuit que, pour généraliſer des Equations de Lignes ſemblables, on employeroit inutilement la Méthode qu'ont ſuivie les Auteurs dont nous avons parlé.



SECTION TROISIE'ME.

SOLUTION
DE QUELQUES PROBLEMES
Par les Méthodes qu'on a données dans la seconde Section.

PROBLEME PREMIER

Assigner les Proprietés, ou les Affections principales du Systéme de Courbes qui est le Lieu de cette Equation ($y^3 = x^3 - ax^2 + b^2 x$), *c'est-à-dire, déterminer la nature, & la situation de ses Sommets, ses Points Singuliers, ou Multiples, ses Branches Infinies...* &c.

SOLUTION.

En premier lieu, puisque le Terme tout connu manque dans l'Equation proposée, on peut conclure de-là que l'Origine est

placée dans le Perimêtre même de la Courbe (*voy. ci-dessus Pag.* 64); de plus, comme le Terme $b^2 x$ s'y trouve, ce point ne peut être un Point Double (*Pag.* 91); mais les membres où les Puissances d'y pourroient avoir des Coefficiens Constans manquant jusqu'à celui qui devroit contenir la troisiéme Puissance de cette Indéterminée, il s'ensuit (*Pag.* 65, 117) que ce même point doit être un Point d'Infléxion de la premiere Espece, & d'une direction coincidente avec celle des Ordonnées : enfin les Equations particulieres qu'on pourroit faire en égalant à zero les Termes qui ne contiendroient ou que x, ou que y seroient ($x = o$), ($x^2 - ax + bb = o$), ($y^3 = o$). & il suit de-là (*Pag.* 55) que la Directrice des y ne rencontre la Courbe que dans l'Origine, au lieu que celle des x la rencontre, &

dans l'Origine, & aux deux distances réelles, ou imaginaires $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

2°. La premiere Differentielle est ($3y^2 dy = \overline{3x^2 - 2ax + bb}. dx$), & la troisiéme, sans y faire entrer ddx, ni ddy, sera ($6y dy^2 = \overline{6x - 2a}. dx^2$). Or, pour voir si la Courbe a des Points Doubles, on doit faire séparément $= o$ chacune des deux parties de la premiere Differentielle (*Pag.* 239.) ce qui donne ($y = o$), & ($3x^2 - 2ax + bb = o$). Mais ($y = o$) substitué dans l'Equation de la Courbe produit cette autre Equation ($x^3 - ax^2 + b^2 x = o$), qui se décompose en ces deux nouvelles ($x = o$), & ($xx - ax + bb = o$). Il y aura donc Point Double en deux cas géné-

raux, le premier quand ces deux Equations ($x = o$), & ($3xx - 2ax + bb = o$) seront vrayes à la fois, & le second quand ces deux-ci ($xx - ax + bb = o$), & ($3xx - 2ax + bb = o$) le seront semblablement.

Mais il est d'abord évident que le premier cas est attaché à la condition ($b = o$), & de plus que dans ce cas le Point Double doit être placé dans l'Origine même.

Pour connoître la condition du second cas je divise ($3xx - 2ax + bb$) par ($xx - ax + bb$), & ensuite le Diviseur de cette Division par son Reste ($ax - 2bb$), ce qui me donne le dernier Reste ($-bb + \frac{4b^4}{aa}$), que je fais $= o$ (*Pag.* 60), & il vient ou ($b = o$), ou ($aa = 4bb$), c'est-à-dire ($a = \pm 2b$): ($b = o$) substitué dans le Diviseur Linéaire ($ax - 2bb$)

égalé à zero donne ou ($x = o$); ce qui revient au premier cas, ou bien ($a = o$) ce qui change la Proposée en ($y^3 = x^3$) qui est à une Droite combinée avec le Lieu imaginaire de l'Equation ($yy + xy + xx = o$): mais ($a = \pm 2b$) étant substitué dans le même Diviseur Linéaire il viendra ($ax - \frac{1}{2}aa = o$); d'où l'on pourra tirer ou bien ($a = o$), condition dont il a été déja parlé, ou bien ($x = \frac{1}{2}a$), ce qui fera conclure que, lorsque a sera $= \pm \frac{1}{2}b$, il y aura un Point Double sur la Ligne des x, & à la distance $\frac{1}{2}a$ de l'Origine.

Dans l'un & l'autre des deux cas que nous venons de distinguer on a eu ($y = o$), & cette valeur substituée dans la seconde Differentielle l'a réduite

à

à ($\overline{6x + 2a.}\, dx^2 = o$), ce qui donne pour dx deux valeurs réelles, & toutes deux = o. Le Point Double ne peut donc jamais être qu'un Rebrouſſement d'une direction coincidente avec celle des y (*Pag.* 254, 337.)

Mais ſi (y=o), & ($3xx - 2ax + bb = o$) n'étoient pas vrayes à la fois, alors la premiere de ces conditions porteroit à des *Maximum*, ou des *Minimum* des x, & la ſeconde à des *Maximum*, ou des *Minimum* des y (*Pag.* 252.); d'où il ſuit que dans les Sommets de la Ligne des x la Tangente de la Courbe doit être coincidente avec la Ligne des y; & on pourroit le conclure encore de ce que nous avons dit à la Page 57.

3°. Pour connoître les Inflexions je ſuppoſe (*Pag.* 257.) un Diviſeur Commun à la premiere Differentielle, & à la ſeconde

prise à la maniere qui a été indiquée ci-dessus, d'où après toutes les réductions, je tire ces deux Equations de conditions ($3y = o$), ou bien ($y = o$), & ($\overline{aa - 3bb}. xx - ab^2 x + b^4 = o$). Or il suit de-là que la distance de l'Origine à la hauteur des Points d'Inflexion sera toujours donnée par l'une de ces deux Equations ($x - ax^2 + b^2 x = o$), qui vient de ($y = o$), & ($\overline{aa - 3bb}. xx - ab^2 x + b^4 = o$); & puisque la premiere suppose que y soit $= o$, elle devra donc être employée lorsque les Inflexions seront situées sur l'Axe même, au lieu que dans les cas différens il faudra faire usage de la seconde. En général tant que $\frac{1}{4} aa$ sera plus grand que bb, les Racines de la premiere Equation seront réelles, & celles de la se-

conde feront imaginaires, & ainfi ce fera de la premiere qu'il faudra fe fervir pour trouver les Infléxions, *& vice versâ*. Dans le premier cas les deux Infléxions differentes de celle que la Courbe fubit dans l'Origine feront placées fur la Ligne des x, & dans le fecond cas elles feront hors de cette Ligne.

Pour trouver l'y qui dans ce dernier cas devra leur convenir on fuppofera un Divifeur commun aux deux Equations ($x^3 - ax^2 + b^2x - y^3 = 0$), ($\overline{aa - 3bb} . x^2 - ab^2x + b^4 = 0$), ce qui conduira à celle-ci ($\overline{aa - 3bb}^3 . y^6 - \overline{aa + 4bb} . \overline{2aa - 9bb} . ab^4y^3 - \overline{aa + 4bb}^2 . b^8 = 0$), qui ne peut avoir au plus que deux Racines réelles . . . . &c.

4°. Pour découvrir les condi-

faire paſſer l'Aſſymptote par l'Origine, & comme dans ce cas b ne ſçauroit encore être $= o$, ſans que l'Equation ſe réduiſit à celle-ci ($y = x^3$), qui, comme on a dit plus haut, eſt à trois Droites, dont deux ſont imaginaires, il s'enſuit que, a étant $= o$, les Branches ne peuvent être de l'eſpece de celles de l'Hyperbole Cubique, & que, ſemblables en cela à celles de l'Hyperbole Conique, elles doivent ramper l'une à la Droite, l'autre à la Gauche de leur Aſſymptote Commune (*Pag.* 165).

Mais pour trouver plus généralement tout ce qui a rapport aux Branches Infinies, à leurs Aſſymptotes, & même aux Diamétres qui peuvent avoir lieu dans le Syſtême propoſé, j'employe ici la Transformation de la Page 309, & comme y eſt dans la Propoſée dans un degré de

complication moindre que x, c'est elle que j'augmente de la quantité q, ce qui donne la Transformée ($y^3 + 3qy^2 + 3q^2y + q^3 = x^3 - ax^2 + b^2x$).

Or supposant un Diviseur commun au plus haut Rang Horizontal de cette Transformée, & à celui qui le suit immédiatement en descendant, il vient pour condition ($q = -\frac{1}{3}a$, & le Diviseur Commun, en y substituant à la place de q sa valeur tirée de cette condition, se trouve être ($y = x$), qui, si l'on le suppose encore commun au troisiéme Rang en descendant, donnera pour seconde condition ($bb = \frac{1}{3}aa$)

Et il suit de tout cela 1°. (*Pag.* 310) que l'Origine de la Proposée étoit éloignée de l'Assymptote de la quantité $-\frac{1}{3}a$ prise sur

la Ligne des *y*, & elle l'étoit aussi de la même quantité sur la Ligne des *x* en conséquence de ce que nous avons remarqué tout à l'heure (*Pag*.357.); 2°.(*P*.165,311) que lorsque *bb* sera $= \frac{1}{3} aa$, les Ordonnées paralleles à l'Assymptote auront Diamétre, ou bien les deux Branches Hyperboliques seront placées toutes deux d'un même côté par rapport à leur Assymptote commune; si *bb* est plus grand que $\frac{1}{3} aa$, la Branche d'en deçà ira du côté négatif, & celle d'en de-là du côté positif, *aut vice versa*...&c.

Que si, pour changer la situation des *y* de maniere qu'elles deviennent paralleles à l'Assymptote, on transforme de nouveau la Transformée précédente par la Méthode qui est décrite à la Page 324,& observant seulement de plus de faire $m = n$; ce qui est indiqué

indiqué par le Diviseur ($y = x$) qu'on a trouvé ci-dessus, on parviendra par ce moyen à cette seconde Transformée ($3n^2 zu^2 + 3nz^2 u - 2nazu + n.\overline{bb - \frac{1}{3}aa}.u + z^3 - az^2 + b^2 z + \frac{1}{27}a^3 = 0$).

Or, si on ordonnoit cette Equation par rapport à z, son dernier Terme seroit $n.\overline{bb - \frac{1}{3}aa}.u + \frac{1}{27}a^3$, lequel égalé à zero donne $u = \frac{-a^3}{9.n.\overline{3bb - aa}}$. Donc, si $3bb = aa$, la distance qui devroit déterminer l'Intersection de la Courbe & de l'Assymptote deviendra infinie, & la Courbe, ainsi qu'on l'a déja vû, ne coupera plus l'Assymptote; si $a = 0$, l'Axe, l'Assymptote & la Courbe se couperont en un même point; si aa est plus petit que $3bb$, l'Intersection de la

Courbe & de l'Aſſymptote ſera placée du côté négatif, & elle le ſera au contraire du côté poſitif, ſi aa eſt plus grand que $3bb$.

6°. Enfin, pour découvrir leſquelles des Eſpeces de M. Newton ſont compriſes dans le Syſtême propoſé, on commencera par reculer, ou avancer l'Origine dans un point quelconque de la Ligne des u, ou de l'Aſſymptote (*Pag.* 307), & enſuite on rendra de même quelconque la ſituation des z (*Pag.* 324), c'eſt-à-dire, qu'au moyen de ces deux Transformations on aura ſubſtitué rx à la place de z, & $p+y+mx$ à la place de u. Cela fait on ſuppoſera dans la Reſultante de ces deux Transformations égaux à zero les Coefficiens des membres où ſe trouveront x^2y, & xy, & ayant déterminé par-là la valeur de p, & celle de r,

on substituëra par tout ces valeurs en la place des deux lettres qui les representeront, ce qui changera la Résultante en une Equation de la forme de celles de M. Newton ; & si pour bannir les Fractions Litterales de cette Equation Newtonienne, & pour abreger son expression, on y suppose $\frac{1}{nm} = t$, $aa - 3bb = cc$, $2aa - 9bb = ee$, ayant même si l'on veut substitué précédemment la valeur de n en m prise de la Formule de la Page 339., & des autres Substitutions qui ont été déja faites, elle prendra enfin cette forme ($xy^2 + \frac{1}{18} t^2 mccy = -\frac{1}{3} m^2 x^3 * + \frac{1}{18} t^2 m^2 c^2 x - \frac{1}{162} t^3 m^2 aee$) ; d'où il suit que les Lieux de la Pro-Proposée sont des *Hyperboles Défectives*, dont la connoissance selon les principes de M. Newton

(*voy. Enum. Lin.* 3e *Ord.*) dépend de l'Enumeration des Racines de l'Equation Déterminée ($x^4 = \frac{1}{6} t^2 c^2 x^2 - \frac{1}{54} t^3 a c^2 x + \frac{1}{432} t^4 c^4$), & comme celle-ci, si elle n'a point trois Racines égales, en a nécessairement deux imaginaires *, il s'ensuit que des Espéces de M. Newton il n'est que la 35e, la 37e, la 38e, la 42e, & la 45e qui puissent être exprimées par la Proposée. Leurs Figures sont dans le Livre de M. Newton marquées par les chiffres 41, 42, 43, 48, 49, & ici par les chiffres 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64.

* Voyez l'Arithm. Univers. de M. Newton Pag. 210, Edition d'Amst. 1732, ou l'Anal. Dem. du P. Reyneau Pag. 242. Edit. de 1708. Et remarquez que dans cette Espéce, si l'on vouloit ôter à la Réduite son second Terme, elle perdroit aussi nécessairement le troisiéme, & elle perdroit encore le quatriéme si le Point Double devoit avoir lieu dans la Courbe.

REMARQUE

Où l'on fait voir que M. Newton auroit pû distinguer dans le troisiéme Ordre des Lignes un nombre d'Especes beaucoup plus grand qu'il n'y en a distingué en effet, & qu'en suivant même les principes de ce grand Géométre on doit ajoûter encore deux nouvelles Especes, & aux 72 dont il a fait l'énumeration, & aux quatre autres que l'illustre M. Stirling a déja prouvé qu'il avoit oubliées.

On aura pû voir tout-à-l'heure avec surprise que nous ayons attribué plus de figures que M. Newton à un même nombre d'Especes de Lignes du troisiéme Ordre, ce qui paroît supposer en quelque façon insuffisantes les Subdivisions de cet Auteur. Cela vient de ce qu'avant d'en venir à son Enumeration

il n'a point fixé le sens qu'il attachoit à ce mot *Espece*, ainsi, par exemple, qu'on pourroit le faire pour les trois Especes de Sections Conique, la Parabole, l'Ellipse, & l'Hyperbole, en disant qu'on range dans une même Espece toutes celles qui ne different que par l'inclinaison de leurs Coordonnées, & de plus (ce qui cependant revient encore au même dans la Parabole) par ce qui les rendroit des Courbes semblables, c'est-à dire, par la quantité, & non par le rapport de leurs Paramêtres.

Au lieu de cela M. Newton a déduit son Enumeration de la seule consideration du nombre, de la situation positive, ou négative, & des égalités respectives des *Maximum*, ou *Minimum* des *x*, sans avoir de même égard aux *Maximum*, ou *Minimum* des *y*, quoique la Directrice des *x* ne

fût pas moins que celle des y une Droite déterminée, & dans une situation *singuliere*.

Que si il avoit fait sur les *Maximum* & *Minimum* des y les mêmes observations qu'il a faites sur les *Maximum* & *Minimum* des x, ses Espéces 1, 2, 3, 6, 10, 14, 15, 16, 22, & 28 auroient encore pû se subdiviser, & il auroit dû en conséquence établir un nombre d'Especes beaucoup plus grand que celui qu'il a assigné.

De plus, en partant même des principes de M. Newton, on trouvera qu'outre les 4 Especes qu'il avoit omises, & que M. Stirling a rétablies, il en est encore échapé à l'un & à l'autre de ces Géométres deux Especes qui doivent avoir leur place entre la 53me & la 54me de M. Newton, & qui ne sont autre chose que sa Figure 57 accompagnée ou d'une Ovale, ou d'un Point Conjugué pla-

cé au-delà de l'Aſſymptote. Leur condition d'exiſtence eſt que les Racines de l'Equation ($bxx+cx+d=o$) étant réelles, elles ſoient de plus d'un Signe different de celui qu'a x lorſqu'elle devient infinie, & qu'il lui répond toujours des y réelles, c'eſt-à-dire, d'un Signe différent de celui de b.

PROBLEME SECOND.

Déterminer les Proprietés, ou les Affections principales de la Caſſinoïde dont l'Equation a été deja donnée ci-deſſus (Pag. 15.).

SOLUTION.

Cette Equation que nous devons rapporter ici de nouveau eſt ($y^4+\overline{2b^2+2x^2}.y^2+x^4-2b^2x^2+2a^2b^2-a^4=0.$)

Or 1°. les Termes Pairs y manquant, ſoit qu'on l'ordonne par rapport à x, ſoit qu'on l'ordonne



par rapport à y, il s'ensuit que la partie située à la Droite de la Ligne des y est parfaitement semblable à celle qui est située à la Gauche de cette Ligne, & qu'il en est de même des parties situées à la Droite, & à la Gauche de la Ligne des x. Dailleurs les trois Termes de l'Equation ordonnée par rapport à y, ou plutôt par rapport à y^2, n'auront jamais alternativement les Signes $+$, & $-$, & il suit de-là que les deux valeurs de yy, si elles sont réelles, ne pourront être à la fois positives : il y aura donc perpetuellement deux valeurs de y imaginaires, & les y ne pourront rencontrerla Courbe qu'en deux points.

De plus faisant du dernier Terme de la Proposée Ordonnée toujours par rapport à y cette Equation déterminée ($x^4 - 2b^2 x^2 + 2a^2 b^2 - a^4 = 0$,) il en resultera quatre Racines ($x = \pm a$),

($x = \pm \sqrt{2bb - aa}$) pour déterminer les points où la Ligne des x rencontrera la Courbe, d'où il suit que, si $2bb$ est plus grand que aa, cette Ligne aura quatre Sommets, si $2bb$ est plus petit que aa, elle n'en aura que deux, si $2bb = aa$, ou encore si $a = o$, deux de ses Sommets se réuniront dans l'Origine, & si $bb = aa$, les Sommets tomberont deux à deux l'un sur l'autre aux distances $+a$, & $-a$ de l'Origine

Or dans ces derniers cas les Sommets seront nécessairement des Points Doubles, puisque le dernier Terme ne manquera pas seul dans la Proposée par les suppositions de ($2bb = aa$), ou ($a = o$), & de (x, & $y = o$), ou bien de ($bb = aa$), & ($x = \pm a$), son pénultiéme Terme y manquant nécessairement, & indépendamment de toutes suppositions. (*voy. Pag.* 57, 58.)

Mais, si l'on ordonne l'Equation par rapport à x, on trouvera que dans differentes suppositions les 4 valeurs de x pourront être ou toutes réelles, ou toutes imaginaires, ou bien réelles, & imaginaires deux à deux; & si du dernier Terme on fait cette Equation Déterminée ($y^4 + 2b^2y^2 - a^4 + 2a^2b^2 = o$), ses deux Racines réelles, & qui ne le seront qu'autant que aa sera plus grand que $2bb$, feront voir que, si $2bb$ est plus grand que aa, la premiere y ne rencontrera point la Courbe, que, si $2bb$ est plus petit que aa, elle la rencontrera en deux points éloignés de l'Origine de la quantité $\pm \sqrt{aa - 2bb}$, & que, si $aa = 2bb$, ou bien si $a = o$, ces deux Sommets se réüniront dans l'Origine, ainsi qu'on l'a déja prouvé.

Enfin puisque le dernier Terme

de la Proposée arrangée par rapport à y, ou à x ne sçauroit manquer seul, le pénultiéme y manquant toujours essentiellement, il s'ensuit (*Pag.* 56, 57) que, si les Sommets ne sont pas des Points Doubles, les Ordonnées qui y passeront leur devront être Tangentes, & comme l'Equation qu'on pourroit faire en égalant à zero le plus haut Rang Horizontal de la Proposée auroit toutes ses Racines imaginaires, on peut encore conclure de-là que la Courbe ne peut avoir des Branches Infinies (*Pag.* 162).

Il est donc visible, même par les seules Remarques que nous venons de faire sur l'inspection de la Proposée que, si $2bb$ est plus grand que aa, la Courbe qu'elle exprimera alors devra être composée de deux Ovales conjuguées réciproquement l'une à l'autre, & situées sur la Ligne des x aux

distances $\pm a$, ou $\pm \sqrt{2bb-aa}$; selon que a sera ou plus petite, ou plus grande que $\sqrt{2bb-aa}$. La longueur de ces Ovales aura pour mesure sur la Ligne des x la quantité $\pm a \mp \sqrt{2bb-aa}$, & par conséquent elles s'anéantiront, & ne formeront plus que deux Points Conjugués lorsque a sera $=b$: si $2bb=aa$, ou bien si $a=o$, les deux Ovales Conjuguées se joindront pour former une Lemniscate, & si enfin $2bb$ est plus petit que aa, le Nœud de la Lemniscate disparoîtra, & la Courbe sera une Ovale, qui pourra avoir des Infléxions qu'on déterminera plus bas.

Dans les cas de l'existence de la Lemniscate il sera encore très-facile de voir que les deux Branches qui la formeront devront subir chacune une Inflé-

que $2bb = aa$; ou bien que $a = o$, & celle du ſecond, où il y a deux Points Doubles ſur l'Axe aux diſtances $+b$, & $-b$ de l'Origine, ſera que $bb = aa$. De plus dans ce ſecond cas les Points Doubles ne pourront être que des Points Conjugués ; car ſubſtituant (*voy. Pag.* 250) ($x = +b$), & ($y = o$) dans la ſeconde Differentielle qui eſt généralement ($4 \cdot \overline{3yy + bb + xx}. dy^2 + 16xydxdy + 4 \cdot \overline{yy - bb + 3xx}. dx^2 = o$), elle pourra ſe réduire à ($dy^2 = -dx^2$), qui a ſes deux Racines imaginaires, au lieu que ſi on y avoit fait x, & $y = o$, comme cela arrive dans le premier cas, elle ſe feroit réduite à ($dy^2 = dx^2$), qui a ſes deux Racines réelles, & égales de quantité, mais l'une poſitive, & l'autre négative ; d'où il ſuit que le Point Double ne peut manquer dans ce cas d'être un Point de Croix dans

les

directions qu'on a décrites à l'Art. précédent; & comme la 3me Differentielle qui est généralement ($24y\,dy^3 + 24x\,dx\,dy^2 + 24y\,dx^2\,dy + 24x\,dx^3 = 0$) se trouve avoir dans le même cas zero pour Coefficient de tous ses membres, il s'ensuit que chaque Branche subit, ainsi qu'on l'a déja dit, une Infléxion dans le Point de Croix (*v. Pag.* 250, 117); de même si on substitue dans cette troisiéme Differentielle les valeurs ($x = \pm b$), ($y = o$), qu'on a déja dit être propres au second cas, elle poura se réduire à ($dy^2 = -dx^2$) ainsi que l'a fait la seconde Differentielle, & il paroîtroit suivre delà que les Points Conjugués devroient être compliqués d'Infléxion, ce qu'on a prouvé possible (*Pag.* 121): mais comme une substitution semblable rendroit encore la quatriéme Differen-

tielle, ou ($24\,dy^4 + 48\,dx^2\,dy^2 + 24\,dx^4 = 0$) divisible par ($dy^2 = -dx^2$), & que la Proposée n'est que du quatriéme Degré, on en doit conclure que la Transformée dont l'Origine seroit placée dans l'un des Points Doubles deviendroit dans le cas présent divisible par la somme des Quarrés de ses Inconnuës ; d'où il suit que dans la supposition présente la Proposée elle-même doit pouvoir se décomposer en d'autres Equations de Degrés inferieurs au quatriéme, & en effet elle devient égale au Produit de ($yy + xx + 2bx + bb = 0$), par ($yy + xx - 2bx + bb = 0$), & on peut regarder indifferemment comme ses Lieux ou deux Cercles d'un Rayon nul, & dont l'Origine seroit éloignée du Centre sur la ligne des x de la quantité $\pm b$, ou bien quatre Droites à

directions Imaginaires, & dont les Equations ſeroient $(y = \overline{x+b} \pm \sqrt{-1}), (y = \overline{x-b} \pm \sqrt{-1})$. Que ſi la Propoſée eût été d'un Degré ſuperieur au quatriéme, & que $(dy^2 = -dx^2)$ n'eût pas diviſé ſa cinquiéme Differentielle, en ce cas les Points Conjugués auroient été compliqués non-ſeulement de deux Infléxions, mais encore de deux Serpentemens infiniment petits.

Enfin puiſqu'en ſubſtituant dans la ſeconde Differentielle les valeurs de x. & de y propres à tranſporter l'Origine dans un Point Double il n'arrive jamais que chaque Terme s'anéantiſſe dans cette ſeconde Differentielle, excepté dans le ſeul cas où b ſeroit fait $= o$, ce qui combiné avec les conditions de l'exiſtence des Points Doubles donneroit auſſi x,

y, & $a=o$, il s'enſuit (*Pag.* 239) qu'il ne ſeroit que ce cas où la Courbe pût avoir de Point Triple. Mais comme par ces ſuppoſitions tous les Termes de la troiſiéme Differentielle s'évanoüiroient auſſi, & que la Transformée convenable au tranſport de l'Origine dans le Point Multiple ſe réduiroit à ceux de ſes Termes qui ſeroient déſignés par la quatriéme Differentielle, c'eſt-à-dire, à ceux dans leſquels la Somme des Expoſans de z, & de u ſeroit toujours égale au nombre 4; de cela, & de ce que la quatriéme Differentielle n'a que des Diviſeurs imaginaires on peut conclure que cette Transformée, & par conſéquent auſſi la Propoſée doivent avoir en ce cas pour Lieu le Syſtême de 4 Droites à directions imaginaires, & dont la rencontre commune ſoit placée dans l'Origine: & en effet la

Propoſée ſe réduit alors à $(\overline{xx+yy}^2=o)$ qui a pour Lieu un ſeul Point Quadruple formé par la Superpoſition avec coincidence de directions (*voy. Pag.* 138) des deux Points Doubles dont nous avons parlé dans l'Article précédent.

3°. Pour déterminer les Serpentemens infiniment petits, & les Infléxions qui peuvent ſe rencontrer dans la Courbe on ſubſtituëra dans la troiſieme, & dans la ſeconde Differentielle priſes à notre maniere les valeurs de dy en dx tirées de la premiere Differentielle, & de la premiere de ces Subſtitutions il reſultera le Produit de ces 4 Equations $(bb=o)$, $(xx+yy=o)$, $(x=o)$, & enfin $(y^4+2.\overline{xx+bb}.yy+\overline{xx-bb}^2=o)$, au lieu que la ſeconde Subſtitution donnera pour Reſul-

tante le Produit de la derniere des Equations que nous venons de rapporter par cette autre ($y^4 + \overline{2xx - bb}.yy + \overline{xx + bb}.xx = o$).

Mais en premier lieu le Diviseur commun aux deux Resultantes, c'est-à-dire, ($y^4 + 2.\overline{xx + bb}.yy + \overline{xx - bb}^2 = o$) n'a que des Racines imaginaires, excepté dans le seul cas où bb seroit $= xx$, ce qui rendroit $y = o$, & supposeroit (ces valeurs devant aussi satisfaire à la Proposée) que aa fût $= bb$: or comme on a vû plus haut que cette condition désignoit les deux Points Conjugués dont nous avons déja traité, il s'ensuit que le Diviseur en question ne peut jamais porter à des Serpentemens infiniment petits, ainsi qu'il le feroit s'il avoit des Racines réelles communes avec la Proposée, & que les Coordonnées

particulieres désignées par de telles Racines aboutissent dans la Courbe à des Points-Simples.

Pour les deux Diviseurs ($bb = o$), & ($xx + yy = o$) de la premiere Resultante, la verité de l'un emporte la verité de l'autre, & ils n'ont lieu tous les deux que dans le cas où tout le Systême de la Courbe se changeroit en un seul Point Quadruple, selon qu'on a observé ci-dessus que cela pourroit arriver.

Il ne reste donc plus, pour pouvoir s'assurer qu'on aura parcouru tous les cas possibles de Serpentemens infiniment petits, qu'à comparer le Diviseur ($x = o$) de la premiere Resultante, non avec le premier Diviseur de la seconde (car toutes les valeurs qu'on pourroit en tirer ont déja été rejettées), mais avec le second Diviseur de cette seconde Resultante, c'est-à-dire, avec ($y^4 +$

$\overline{2xx - bb}. yy + \overline{xx + bb}. xx = 0$).

Or cette derniere comparaiſon donne ($y = 0$), ou ($x = \pm b$), & ſubſtituant dans la Propoſée les valeurs ainſi trouvées pour x, & pour y, il vient pour le premier cas les conditions ($2bb = aa$), & ($a = 0$), leſquelles ſe ſont déja preſentées ci-deſſus, & dénotent comme on l'a prouvé le Point de Croix d'une Lemniſcate.

Quant au ſecond cas ſa condition d'exiſtence eſt ($3bb = aa$); de plus les valeurs déja trouvées pour x, & pour y, & celle de aa qui réſulte de cette condition étant ſubſtituées dans la premiere Differentielle, elles n'y anéantiroient point le Coefficient de dy, & elles y anéantiroient au contraire celui de dx, & c'eſt une marque 1°. (*Pag.* 64, 239, 252) que le Point trouvé ne pourra être que Simple, d'où il ſuit que ce ſera un

un Serpentement infiniment petit, & 2° que ſa direction ſera coincidente avec celle des x ; & on peut conclure de-là qu'on en démontreroit plus ſimplement encore l'exiſtence, ſi l'on traitoit dans les Differentielles dx comme Conſtante, ſelon que l'enſeigne la Méthode que nous avons donnée (*Pag.* 307) : mais comme, en commençant la recherche Analytique que nous venons de faire, nous ignorions que le ſeul Serpentement infiniment petit qui peut avoir lieu dans les Caſſinoïdes y dût avoir une direction coincidente avec celle des x, nous avons dû par cette raiſon nous ſervir dans cette recherche de la Differentiation générale.

Pour les Points d'Infléxion leur détermination dépend de la Combinaiſon de la Propoſée avec la ſeconde de nos Reſultantes ſeu-

lement. Or comme l'un des Diviseurs de cette seconde Resultante, sçavoir celui qui lui étoit commun avec la premiere, a été déja examiné, & a été trouvé ou inutile, ou dénotant des Points Doubles, il s'ensuit que dans la comparaison que nous devons faire il suffira d'employer au lieu de la seconde Résultante son second Diviseur seulement, c'est-à-dire, ($y^4 + \overline{2xx - bb}.yy + \overline{xx + bb}.xx = 0$).

On peut donc d'abord conclure de-là qu'il y aura quatre Infléxions dans la Courbe situées aux distances $\sqrt{z}$, & $\sqrt{u}$ de l'Origine lorsque les deux Paraboles ($uu + \overline{2z - b}.u + \overline{z + b}.z = 0$), & ($uu + 2.\overline{z + b}.u + \overline{z - 2b}.z - \overline{a + 2b}.a = 0$) se rencontre-

ront du côté des z, & des u positives, les Conſtantes a, & b étant ſuppoſées poſitives dans l'une & dans l'autre ; & cela pourroit déja fournir une conſtruction facile des Infléxions cherchées.

Pour les déterminer Algébriquement on comparera en effet à la Propoſée le Diviſeur cideſſus, & il viendra de-là les nouvelles Réſultantes ($xx = \frac{-a^4 + 2aabb}{6bb} \pm \frac{a\sqrt{aa-2bb}}{2\sqrt{3}}$),

& ($yy = \frac{a^4 - 2aabb}{6bb} \pm \frac{a\sqrt{aa-2bb}}{2\sqrt{3}}$) ;

d'où il ſuit que, ſi aa eſt plus petit que $2bb$, il n'y aura plus d'Infléxion de poſſible, que, aa étant $= 2bb$, ou, a étant $= 0$, x, & y ſeront $= 0$ dans l'Infléxion, qui ſera dans ces deux cas double, & placée dans un Point de Croix, & enfin que, ſi aa eſt

plus grand que $2bb$, les diſtances des Infléxions à l'Origine ne ſeront encore poſſibles, ou réelles qu'au cas que $\frac{a\sqrt{aa-2bb}}{2\sqrt{3}}$ ſoit plus grand que $\frac{a^4-2aabb}{6bb}$, condition qui peut ſe réduire aiſément par le Calcul à cet autre énoncé plus ſimple . . . au cas que aa ſoit plus petit que $3bb$.

Et quant aux directions des Infléxions, elles ne peuvent manquer, ainſi que celles de tous les autres Points *Simples* Singuliers, d'être réelles, même dans toutes les Courbes, lorſque leurs diſtances de l'Origine ſont telles, puiſque les Coefficiens des Differentielles, & par conſéquent la valeur de dy en dx tirée de la *premiere* Differentielle, ne peuvent contenir de quantités imaginaires ſi x, & y ſont réelles, auſſi

bien que les Paramêtres de la Courbe.

Pour conſtruire enfin les Infléxions que nous venons de déterminer on pourra ſe ſervir des Interſections de la Caſſinoïde propoſée avec une autre Caſſinoïde de Lemniſcate élevée verticalement (*voy. Fig.* 65) ſur l'Axe Horizontal de la premiere, & dont le Paramêtre (il eſt aiſé de voir que les Caſſinoïdes Lemniſcates ne peuvent en avoïr qu'un) ſera côté d'un Triangle Rectangle qui aura *b* pour Hypothenuſe ; car, ſi l'on change *y* en *x*, & *x* en *y* dans le ſecond Diviſeur de la ſeconde Réſultante de la Page 382, ce Diviſeur deviendra l'Équation de la Caſſinoïde Lemniſcate dont nous parlons.

Mais les directions de ces Infléxions feront paralleles (*voy. Pag.* 252) à la Droite qu'auroit pour Baze l'Angle des Coordon-

nées si on lui donnoit pour Côtés des lignes Proportionnelles aux Coefficiens des deux Differences dans la premiere Differentielle, les valeurs de x, & de y propres au Point Singulier ayant été précédemment substituées en leur place dans cette Differentielle.

Et de tout ce que nous avons dit ci-dessus on pourra conclure généralement 1°. que, a étant $= o$, la Courbe doit être une Lemniscate (*Fig.* 66.); 2°. que, a étant plus petit que b, les deux Cœurs de la Lemniscate se détachent l'un de l'autre pour former deux Ovales (*Fig.* 67.), lesquelles vont toujours en se rapetissant jusqu'à ce que, a étant $= b$, elles se changent en Points Conjugués, ou en Cercles à Rayon nul ...&c, selon que nous l'avons fait voir plus haut, & c'est là, pour ainsi dire, le troisiéme état de la Cassinoïde (*Fig.* 68.); 3°. a de-

venant plus grand que *b*, les Ovales recommencent à paroître, & elles vont alors en s'agrandissant jusqu'à ce que, aa devenant $= 2bb$, deux de leurs Sommets se joignent de nouveau pour redonner la même Lemniscate qu'on a trouvée dans le premier état, & c'est ici le cinquiéme état, où la Courbe est entierement semblable à ce qu'elle étoit dans le premier; 4°. aa devenant plus grand que $2bb$, les Cœurs s'ouvrent, pour ainsi dire, & commencent à former (*voy. Fig.* 69) une Ovale à 4 Infléxions. Ces Infléxions, qui sont d'abord très-voisines du Centre, s'en éloignent peu à peu; mais quand elles sont parvenuës à la distance $b, \frac{1}{2\sqrt{2}}$ de la Ligne des y, ce qui arrive lorsque $aa = bb. \overline{1 + \sqrt{1\frac{1}{4}}}$, * elles se raprochent

* Pour démontrer cette Proprieté il fau-

pour lors de cette Ligne continuant toujours néanmoins à s'éloigner de celle des x, & la Courbe parcourt ainsi son sixiéme état, jusqu'à ce que, aa étant devenu $= 3bb$, les Infléxions se joignent deux à deux pour former dans les Sommets de la Ligne des y deux Serpentemens infiniment petits, ce qui peut être regardé comme le septiéme état de la Courbe (*Fig.* 70); enfin, aa étant plus grand que $3bb$, la Courbe conserve toujours à l'œil la figure d'une Ovale pure, ou sans Infléxions jusqu'à ce que, a étant infini, elle se réduit au Systême de deux Cercles l'un à Rayon réel & infini, & l'autre d'un Rayon qui seroit égal en

droit traiter a comme variable dans la Valeur trouvée ci-dessus pour xx convenable à l'Infléxion, & supposer ensuite que x dût devenir un *Maximum*, ce qui, faisant $dx = 0$ donneroit les valeurs que nous avons assignées.

quelque façon de quantité au premier, ſuppoſé qu'il exiſtât, mais qui eſt en effet imaginaire, ou impoſſible, & ce ſont là les deux derniers états par où la Courbe peut paſſer ; car ſi, au lieu d'augmenter toujours *a*, on avoit au contraire augmenté *b* continuellement, on auroit trouvé, mais dans un ordre renverſé, les mêmes états que nous venons de parcourir.

Or on peut voir par là que la Caſſinoïde n'a pas été bien connuë par ceux qui en ont parlé juſqu'ici, si l'on en excepte cependant l'illuſtre M. Gregory, (*voy. Aſtr. Phyſ.* & *Geom. Elem. Pag.* 331. *edit. de Gen.* 1726, *ou bien Tranſ. Phil. Sept.* 1704.).

REMARQUE

Où l'on établit la possibilité d'une Propriété des Courbes dont il a été parlé ci-dessus (Pag. 85, 86), *& où l'on indique une autre Proprieté fort singuliere des Cassinoides Lemniscates.*

Nous venons de faire voir tout-à-l'heure que la Cassinoïde dans son huitiéme état, où elle est susceptible d'une variété infinie de figures, n'avoit ni Infléxions réelles, ni Serpentemens infiniment petits, c'est-à-dire, que n'ayant point de Serpentemens infiniment petits, elle ne pouvoit cependant être rencontrée par aucune Droite en plus de deux Points réels. Or c'est là précisément cette Propriété que M. de Maupertuis a jugée impossible dans les Courbes, & que nous avions promis (*Pag.* 86) de dé-

montrer au contraire poſſible par des exemples.

Nous ne devons point non plus abandonner cette matiere ſans faire mention d'une Propriété ſinguliere des Caſſinoides Lemniſcates que nous n'avons point jointe à la Théorie précédente ; parce que ſa démonſtration eſt entierement indépendante des principes ſur leſquels cette Théorie eſt fondée. Cette raiſon, & la crainte de paroître trop diffus feront même que nous nous contenterons d'en rapporter ſeulement l'énoncé ; le voici.

Sur deux Axes infinis, mais dont la Difference des Quarrés ſera $=4bb$, ſoit imaginée conſtruite une Ellipſe infinie, & infiniment approchante de l'état de Cercle, dans laquelle ſoient ſuppoſés tirés une infinité de Diamétres qui ſoient deux à deux perpendiculaires l'un ſur l'autre ;

qu'on prenne successivement chaque Paire de ces Diamétres perpendiculaires l'un sur l'autre pour les Axes de nouvelles Ellipses semblablement infinies, & la Cassinoïde Lemniscate, & finie qui aura pour Equation $(y^4 + 2.\overline{xx + bb}.yy + \overline{xx - 2bb}.xx = 0)$ passera par les Foyers de toutes les Ellypses infinies ainsi construites.

PROBLEME TROISIE'ME.

Déterminer la nature, & la situation des Branches Infinies, & des Points Multiples des deux Courbes exprimées par ces Equations $(y^4 - \overline{6ax - 8aa}.yy + aaxx = 0)$, $(x^4 - ayxx + by^3 = 0)$.

SOLUTION.

Nous ne parlerons point ici des autres Propriétés de ces deux

Courbes, parce que nous avons déja fait dans les deux Problêmes précédens assez d'applications des Régles qu'il faudroit employer pour les découvrir, & que d'ailleurs elles ont été déja démontrées par M. Saurin (*voy. Mem. de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris, ann.* 1717. *Pag.* 59. & *an.* 1724. (*Pag.* 222.). Nous nous en raporterons même aux Calculs que ce sçavant Académicien doit avoir faits avant de supposer que ces deux Courbes ne pouvoient avoir de Point d'Infléxion, ainsi qu'il paroît l'avoir supposé en effet, si l'on en juge par ses Figures que nous avons suivies (*voy. Fig.* 71, 72.).

Les Branches Infinies dans l'une & l'autre de ces Courbes tendent à devenir paralleles à l'une des Coordonnées (*voy. Pag.* 42, 43.); elles ne peuvent être que Paraboliques, & elles ont pour Assymptotes Courbes (*voy.*

La Régle du Parallelogramme de M. Newton) les deux Equations ($y^4 - 6axyy + a^2x^2 = o$), ou bien ($yy = \overline{3 \pm 2\sqrt{2}. ax}$), qui a pour Lieu le Systême de deux Paraboles Coniques à Paramêtres réels & tous deux positifs, & ($x^4 = -by^3$) qui est à une troisiéme Parabole Quarrée Quarrée à Paramêtre négatif. Or il est facile de conclure de-là que les Branches de ces deux Courbes doivent prendre les figures qui leur ont été données (*v. Fig.* 70, 72).

Que si ces Equations se fussent presentées sous une forme differente, & par laquelle elles eussent été rapportées à d'autres Ordonnées, à celles, par exemple, qui, en supposant de 60 Degrés l'Angle des Coordonnées anciennes, formeroient avec ces deux Coordonnées anciennes un Triangle

Equilatére, ce qui produiroit ces Equations ($\overline{u+z}^4 - 6az.\overline{u+z}^2 - 7aauu - 16aauz - 8aazz = 0$), ($\overline{u+z}^4 - au.\overline{u+z}^2 + bu^3 = 0$), alors la premiere application de la Régle du Parallelogramme de M. Newton n'auroit point suffi pour discerner la nature des Branches, & on auroit pû se servir pour cet effet des Régles que nous avons données (*Pag.* 175.), selon lesquelles, la Racine Quadruple du plus haut Rang Horizontal étant dans la premiere Courbe Racine Double du second Rang en descendant, & n'y divisant pas le troisiéme, & cette Racine ne divisant pas même le second Rang dans la seconde Courbe, on auroit tiré pour connoître l'Espece de Parabolisme des Branches les mêmes conclusions que ci-dessus.

Mais pour découvrir si les Paramêtres des Paraboles qui forment l'Assymptote Courbe de la premiere des Proposées auroient dû être réels, ou imaginaires, pour déterminer leur Signe, où leur quantité, comme aussi le Signe, & la quantité du Paramêtre de la Parabole Quarrée Quarrée qui est Assymptote Courbe de la seconde Proposée, pour tout cela il auroit été nécessaire (*voy. Pag.* 325.) de rendre l'Ordonnée des Proposées parallele aux directions des Branches Infinies, c'est-à-dire, de transformer ces Equations de façon à en faire naître par cette Transformation d'autres qui eussent été de la forme qu'a considerée M. Saurin, & sur lesquelles on auroit fait les réfléxions par où nous avons commencé.

Quant aux Points Multiples des deux Courbes, il n'y en a qu'un

qu'un dans chacune d'elles ; ils sont placés l'un & l'autre dans l'Origine, ainsi que le manquement des Rangs Horizontaux inferieurs le fait aisément connoître (*Pag.* 91, 92.) ; celui de la premiere Courbe est par la même raison Double, & celui de la seconde est Triple ; ils sont tous deux des Points d'Interfection, puisque les Rangs Horizontaux les plus bas n'ont dans les deux Courbes que des Racines réelles (*Pag.* 97) ; enfin le Point Double de la premiere Courbe n'est pas, comme il pourroit l'être dans d'autres Courbes du même Ordre, compliqué d'Inflexion, puisque le quatriéme Rang en montant n'y peut avoir de Diviseur Commun avec le troisiéme.

Mais il reste encore à déterminer si les differentes Branches de ces Points de Croix devront tourner vers l'Origine des x leur

Convexité, ou leur Concavité, d'où il pourroit naître de la varieté ou dans la ſituation du Point Double de la premiere Courbe (*voy. Fig.* 71.), ou dans la ſituation, & dans la nature même du Point Triple de la ſeconde (*voy. Fig.* 72.).

Que ſi nous n'avons point entrepris une recherche ſemblable dès le ſecond Problême, où il s'eſt preſenté un Point de Croix compliqué de deux Inflexions, c'eſt que cette complication a fait que les deux Branches au ſortir d'un Cœur n'auroient pû s'oppoſer leurs Convexités ſans que les Tangentes du Point de Croix euſſent rencontré la Courbe en ſix points, ce qui étoit impoſſible.

Or, pour venir à bout de diſcerner les cas differens que cela peut produire, il ſuffira de chercher de quels Signes devront être les Paramêtres des Sommets Pa-

raboliques qui composeront l'Intersection proposée, ce qui se pourroit faire par la substitution en entier de $z+nu$, & mu en la place des deux Coordonnées, après laquelle on détermineroit le raport $\frac{n}{m}$ par son *Aptitude* à rendre nulle la partie Constante du Coefficient de la plus basse Puissance de la nouvelle Ordonnée, & l'Equation de la Parabole Osculatrice (qui est la seule chose dont nous ayons besoin ici) se formeroit de la partie où la même Puissance de l'Ordonnée seroit multipliée par l'Abscisse Linéaire, & de celle où la Puissance immédiatement superieure de l'Ordonnée auroit un Coefficient Constant.

De plus cette seconde partie de l'Equation de l'Assymptote Courbe est d'abord facile à connoître par les Régles que nous avons données (*Pag.* 90.).

Et pour la premiere, si l'on observe ce qui se passe dans la Transformation de la Page 325, on trouvera qu'elle doit comprendre tous les membres de la premiere Differentielle où dx seroit *affecté* d'une dimension seule d'Inconnuës, s'il s'agit d'un Point Double, de deux dimensions seulement, s'il s'agit d'un Point Triple... &c; d'où l'on concluëra que pour connoître le Coefficient de z dans le Terme en question de l'Equation de l'Assymptote il faudra 1°. multiplier le Rang Horizontal le plus bas par u élevé à un exposant égal au sien — 1, & le diviser ensuite par x, 2°. substituer par tout dans ce Rang n, & m à la place de x, & de y, 3°. enfin le multiplier membre à membre, en commençant par les plus hautes Puissances de y, par les Termes de la Progression Arithmétique 0, 1, 2, 3, &c.

Ainsi dans la premiere de nos deux Courbes ce Coefficient deviendra ($2aannu$), & la seconde partie ci-dessus étant ($-6anm^2u^3$), l'Equation de la Parabole Osculatrice sera ($az = 3m^2u^2$), dont les Paramêtres sont positifs même dans toutes les suppositions possibles du rapport de n à m, & ainsi ils ne peuvent manquer de l'être dans la supposition particuliere que ce rapport convienne aux deux directions du Point Double, c'est-à-dire, que n soit $= 2\sqrt{2}.m$. Or cela fait voir que les Concavités des deux Branches qui forment le Point Double de la premiere Courbe doivent se tourner à la fois du côté positif par rapport à la Ligne des x.

De même dans la seconde Courbe la premiere partie de l'Equation de la Parabole Osculatrice

Paires de Branches qui rampent à leurs côtés. Pour cet effet je fais d'abord la substitution générale de $u+q$ à la place de y, ou bien je fais par le moyen des Differentiations celle de $y+dy$ à la place de y, laquelle represente la premiere; je détermine ensuite q, ou dy par son *Aptitude* à faire manquer la partie Constante du Coefficient de x, ou, ce qui est la même chose, par son *Aptitude* à porter l'Origine dans l'une des deux Assymptotes paralleles, & cela donne (q, ou $dy = \pm \sqrt{c}$). Je multiplie outre cela par cette valeur le Coefficient de x dans la Proposée, le divisant de plus par y, & le multipliant encore de bas en haût par les Termes de la Progression Arithmétique (0, 1, 2), ce qui produit $\pm 2\sqrt{c}.y$ pour Coefficient de x dans l'Equation de l'Assymptote Courbe. Enfin

l'autre

l'autre Terme de l'Equation de cette Assymptote étant ($edy - d$), c'est à-dire, $\pm e\sqrt{-d}$) la Puissance de l'Assymptote Courbe deviendra generalement ($\frac{e}{2} \mp \frac{d}{2\sqrt{e}}$). Or de ces deux valeurs il y en a une qui reste perpetuellement positive, mais l'autre est ou positive, ou négative, selon que *cee* est plus grand, ou plus petit que *dd*. Donc dans le premier cas la Courbe doit être telle qu'on la voit (*Fig*. 48), c'est-à-dire, que ses deux Assymptotes Paralleles doivent être posées semblablement par rapport à leurs Branches de Courbe, & dans le second elle doit ressembler à celle de la Figure 49, où les deux Assymptotes sont posées d'une maniere contraire l'une à l'autre par raport aux Branches qui leur appartiennent. Aussi cette condition revient-elle à

celle qu'a assignée plus simplement M. Newton pour ce cas particulier, ce qui pourtant n'empêche pas que dans les cas difficiles notre Méthode ne soit plus simple que les autres qu'on pourroit employer au même usage.

Que si malgré cela nous avons differé à la donner jusqu'à ce que ce Problême nous en eût présenté l'occasion, cela vient de ce que nous n'avions point jugé à propos ci-dessus (*Pag.* 142, 171.) de faire deux Especes des Points des Fig. 16, 43, & des Branches des Fig. 48, 49; c'est ce qui fait aussi que nous ne nous étendrons pas ici sur les difficultés qui pourroient se présenter dans l'usage de ces Regles en certains cas particuliers, & ausquelles nous esperons qu'après tout ce qui a été dit ci-dessus le Lecteur pourra suppléer sans peine.

Et nous pensons de même qu'il

est presqu'inutile d'observer que, lorsque a s'anéantit dans la seconde des Proposées de ce Problême, l'Origine doit devenir un Lemnisceros infiniment petit dans la Direction des x, l'Equation faite du quatriéme Rang en montant venant pour lors à avoir ses trois Racines égales à zero, & la Courbe se changeant en la seconde Parabole Quarrée Quarrée.

PROBLEME QUATRIE'ME.

Déterminer les Proprietés principales des Lignes de l'Ordre n, dont l'Equation peut être renfermée dans la Formule suivante ($y = a + bx + cx^2 + ex^3 \ldots . + px^n$).

Ces Lignes qui sont les mêmes que M. Newton a nommées de Genre Parabolique, & de la description desquelles il s'est servi

pour l'Interpolation des Series, l'Approximation des Quadratures, & les autres Problêmes qui dépendent de ces deux-là * ne peuvent d'abord avoir pour Assymptote Courbe (*v. Pag.* 189) que la Parabole $y = ax^n$), laquelle selon que n sera un nombre pair, ou impair ressemblera de figure (*voy. Pag.* 53), ou à la Parabole Conique, ou à la premiere Parabole Cubique.

En second lieu on ne peut concevoir dans ce Systême aucun Point Multiple, parce que le Coefficient de dy dans la premiere Differentielle ne peut jamais devenir nul (*Pag.* 239), & par la même raison on n'y peut concevoir non plus de Tangente parallele aux y, ou aux dernieres directions des Branches (*Pag.* 256), mais il s'en trouvera de paralleles aux x toutes les fois

* Voyez Newt. Method. Diff.

que l'Equation ($y - a - bx - cx^2$ .... & $- px^n = 0$) aura des Rácines égales, c'eſt-à-dire, dans toutes les diſtances marquées par cette Equation déterminée ($b + 2cx + 3ex^2 .... + npx^{n-1} = 0$)

Il ne peut donc y avoir dans cet Fxemple de difficile à déterterminer par nos Méthodes que les Points Singuliers, & auſſi ne l'avons-nous placé ici par préference à d'autres qu'à cauſe qu'il renferme une difficulté particuliere qui pourra ſe préſenter quelquefois lorſqu'on ſe ſervira de nos Regles pour faire la recherche de Points pareils, & qui, ſi elle n'étoit levée, porteroit peut-être mal à propos à croire que ces Regles ſeroient inſuffiſantes dans les cas en queſtion.

En effet, la Méthode que nous avons donnée plus haut pour

trouver les Points Singuliers prescrivant d'égaler l'une à l'autre les valeurs de dy en dx qui proviendront des differentes Differentielles prises à notre maniere, il ne paroît pas d'abord qu'elle puisse être employée lorsque toutes les Differentielles superieures à la premiere ne contiendront point dy, & qu'ainsi elles ne pourront faire connoître la valeur de dy en dx, ce qui arrive effectivement dans l'exemple présent.

Pour lever cette difficulté je remarque qu'on n'a supposé dans la recherche des Points Singuliers un Diviseur Commun aux premieres Differentielles prises à notre maniere qu'entant que ces Differentielles representoient les premiers Rangs inferieurs de la Transformée où l'Origine auroit été placée dans le Point Singulier, lesquels Rangs auroient dû en effet s'anéantir à la fois dans

cette Transformée par une même valeur de u en z: mais, si entre ces Rangs quelques-uns avoient manqué en entier, & essentiellement dans la Transformée, à plus forte raison auroit-on pû dire qu'ils auroient dû être nuls dans la supposition de la valeur de u en z qui auroit anéanti les autres. Donc aussi, lorsqu'une des Differentielles ne contiendra point dy, elle pourra cependant n'en désigner pas moins un Point Singulier, & elle le désignera en effet dans la supposition qui anéantira le seul Coefficient qui pourra lui rester.

Par conséquent dans les cas dont il est question maintenant il faudra pour trouver les Points d'Infléxion ordinaires supposer $=0$ le Coefficient de dx^2 dans la seconde Differentielle, & cette supposition combinée avec l'Equation proposée portera au

Point cherché, dont on détermi-nera ensuite la direction en sub-stituant dans la premiere Diffe-rentielle les valeurs de y, & de x propres à ce Point.

De même pour trouver les Serpentemens infiniment petits ordinaires il faudra faire à la fois $=$ o dans la Somme des Dif-ferentielles le Coefficient de dx^2; & celui de dx^3; & ces supposi-tions étant ensuite combinées avec la Proposée donneront des valeurs de y, & de x propres au Point cherché, & une condition de son existence .... &c.

Et il est sensible que les Re-gles que nous venons de donner en dernier lieu se trouveront toujours renfermées dans la Mé-thode generale démontrée ci-dessus, pourvû qu'on lui donne pour énoncé, qu'il faut pour trouver les Points Singuliers dif-ferents supposer à la fois $=$ o les

differentes premieres Differentielles prises à notre maniere ; car une Equation n'est pas moins renduë vraie en supposant nuls tous ses Coeffieiens, qu'en supposant veritable la valeur de son Indéterminée tirée de sa résolution.

Revenant à présent à l'Exemple proposé, si l'on veut d'abord que son Equation ne soit que du troisiéme Ordre, il n'y aura qu'une infléxion dans la Courbe, mais il y en aura nécessairement une ; la valeur de x qui lui conviendra se tirera du Coefficient de dx^2 égalé à zero, & elle sera ($x = -\frac{c}{3e}$) ; celle de y sera par conséquent ($y = a \frac{-9bce + 2c^3}{27\,ee}$) ; enfin si l'on transportoit l'Origine dans ce Point (*Pag.* 236), & qu'on rendît les Abscisses paralleles à sa direction (*Pag.* 324),

il naîtroit de ces Transformations une Equation de cette forme ($y = ax^3$), ce qui prouve que la Courbe proposée étoit dans ce premier cas la premiere Parabole Cubique elle-même.

Mais, si la Proposée étoit supposée du quatriéme Ordre, les valeurs de x convenables à ses Infléxions seroient données par les Racines de cette Equation ($6fx^2 + 3ex + c = o$), & comme cette derniere Equation doit avoir deux Racines égales lorsque $\frac{9}{4}ee = 6cf$, ou que $3ee = 8cf$, auquel cas elle se réduit à ($4fx + e = o$), il s'ensuit sans autre démonstration que, si $3ee = 8cf$, la Courbe aura un Serpentement infiniment petit déterminé par l'Equation ($4fx + e = o$), ainsi qu'on l'auroit trouvé en effet en faisant $= o$ le Coefficient de dx^3; si $3ee$ est plus grand que $8cf$, elle aura deux Inflé-

xions, & si $3ee$ est plus petit que $8cf$, elle n'aura plus ni Infléxion, ni Serpentement, ensorte qu'elle ne differera à l'œil de la Parabole ordinaire qu'en ce qu'elle sera vers le Sommet beaucoup plus applatie; & voilà encore contre M. de Maupertuis un exemple, ou plutôt une infinité d'exemples (car chacune des Equations renfermées dans la Formule ci dessus en pourroient fournir un, à l'exception de la seule Parabole Cubique) voilà, dis-je, une infinité de nouveaux exemples de Courbes qui, sans qu'elles ayent de Serpentement, ne peuvent néanmoins être rencontrées par des Droites en autant de points réels que l'Exposant de leur Equation contient d'unités.

De plus on peut conclure en general de ce que nous venons de dire sur la Formule ci-dessus que les Courbes qu'elles désignent

peuvent avoir jusqu'à $n-2$ Infléxions, & par conséquent $\frac{1}{2}.n-1$, Sinuosités, entre lesquelles les unes peuvent s'évanoüir tout-à-fait, d'autres devenir infiniment petites, & former un Serpentement; & si cela arrive à la fois à deux, trois, quatre Sinuosités voisines... &c, il en naîtra des Inflexions, & des Serpentemens de tous les Ordres. En un mot la suite unique d'Ordonnées exprimée par cette Formule pouvant passer par des états de grandeur, & de petitesse variés de toutes les façons imaginables, il suit de cela seul qu'il est toujours possible de faire passer par autant de points, & par de tels points qu'on voudra une Courbe de ce genre, ainsi que M. Newton en a donné en effet les moyens.



PROBLEME CINQUIE'ME.

Faire les Divisions générales des Lignes du second, & du troisiéme Ordre, & indiquer des moyens pour en faire d'analogues dans les Ordres plus élevés.

La solution de ce Problême, par lequel nous finirons cet Ouvrage, suppose en quelque maniere une Proposition qui a été déja prouvée par differens Géométres ; & que nous pourrions en conséquence nous abstenir de démontrer ici, renvoyant le Lecteur aux preuves que ces Auteurs en ont données. Comme néanmoins cette Proposition a un rapport immédiat à la matiere que nous allons traiter, que d'ailleurs elle est d'une grande generalité, & qu'enfin les moyens que nous pouvons employer pour la démontrer sont nouveaux, & tirés

de la ſimple Analyſe de Deſcartes, nous croyons par ces raiſons qu'on ne deſaprouvera point que nous la placions ici en forme de Lemme.

LEMME.

Toute Branche de Courbe doit ou revenir sur une de celles qui lui ſont Conjuguées dans le Syſtéme auquel elle appartient, comme ſont, par exemple, les Branches du Cercle, & de l'Ellypſe, ou bien avoir un cours infini, comme celles de la Parabole, & de l'Hyperbole.

DEMONSTRATION.

Pour ſe démontrer cette Propoſition on ſe rappellera d'abord qu'une Equation quelconque ne peut avoir qu'un nombre pair de Racines Imaginaires, & en ſecond lieu on remarquera que deux Racines d'une Equation indéter-

minée, qui, ayant été réelles jusqu'à un certain point de l'Axe de la Courbe qui est le Lieu de cette Equation, deviennent imaginaires au-delà de ce point doivent être dans ce point ou toutes deux nulles, ou toutes deux infinies, ou égales entr'elles.

Cela vient de ce que ces deux Racines ne deviennent imaginaires au-delà du point en question qu'à cause qu'une quantité qui entre dans leur expression commune sous un Signe Radical pair, devient négative croissante de positive décroissante qu'elle étoit auparavant, & de ce que le passage de cette quantité du Positif croissant au Négatif décroissant ne peut se faire que par zero; d'où il suit que, si le Signe Radical pair faisoit seul le Numerateur de l'expression de ces deux Racines réduites s'il le falloit en Fractions, ainsi que toute quan-

quantité peut s'y réduire, pour lors elles deviendroient à la fois égales à zero au point de leur passage du Réel à l'Imaginaire : de même, si le Signe Radical pair faisoit seul le Dénominateur de leur expression, elles devroient dans ce passage être à la fois infinies, & enfin si le Numerateur, ou le Dénominateur de leur expression contenoit le Signe Radical pair ajoûté à autre chose, ou soustrait d'autre chose, dans ces deux derniers cas le passage dont nous parlons ne pourroit se faire que par l'égalité de ces deux Racines.

Or, comme dans toute Branche de Courbe qui, s'il étoit possible, ne reviendroit point sur l'une de *ses Conjuguées*, & qui n'auroit point d'ailleurs un cours infini, ou, ce qui est la même chose, dont le cours seroit brusquement interrompu, même sans

Point

Point de Rebroussement, comme, dis-je, dans de telles Branches, si elles pouvoient avoir lieu dans les Courbes, des suites d'Ordonnées qui y seroient terminées passeroient du Réel à l'Imaginaire, de l'état d'existence à celui de non existence, sans être néanmoins dans ce passage ou toutes deux nulles, ou toutes deux infinies, ou égales entr'elles, cela prouve qu'on ne peut concevoir de Branche de Courbe qui continuée ou bien ne revienne sur l'une de *ses Conjuguées*, ou bien n'ait un cours infini, ou, si l'on aime mieux l'énoncé suivant, que tout point de Courbe, auquel une Ordonnée qui avoit jusqu'alors existé commence à n'exister plus, doit nécessairement ou être d'une direction coincidente avec celle de cette Ordonnée, ou bien être Multiple, ou bien enfin se perdre dans l'infini.

SOLUTION DU PROBLEME.

La Formule que contient le Triangle Algébrique de la Fig. 4, & qui représ nte, ainsi qu'on l'a fait voir plus haut (*voy. Pag.* 28), l'Equation la plus generale du troisiéme Degré representera aussi par la même raison l'Equation la plus generale du second Degré si l'on suppose qu'il lui manque le plus haut de ses Rangs Horizontaux, en sorte qu'il ne lui en reste plus que trois sçavoir a, $by + cx$, $ey^2 + fxy + gx^2$.

Or, pour commencer par les divisions des Lignes du second Degré, le plus haut des trois Rangs que nous venons de raporter pourra, si l'on en fait une Equation particuliere, avoir ou deux Racines réelles & égales, ou deux Racines réelles & inégales, ou bien enfin deux Racines imaginaires.

Dans le premier cas, si le Di-

viſeur Double du premier Rang diviſe encore le ſecond en deſcendant, alors faiſant paſſer le troiſiéme Rang, c'eſt-à-dire, la partie toute Conſtante du dernier Terme de l'autre côté du Signe d'Egalité, & ajoûtant de part & d'autre le Quarré de la moitié du Quotient qu'on trouvera en diviſant le Coefficient du Diviſeur en queſtion dans le ſecond Rang par le Coefficient qui dans le 1er Rang multiplie le Quarré de ce même Diviſeur, on viendra à bout par ce moyen de changer la Propoſée en une Egalité de deux Quarrés; de plus, ſi l'on tire les Racines de ces deux Quarrés, la Propoſée ſe décompoſera enfin en deux Equations de Droites, dont les directions ſeront néceſſairement réelles, mais dont les diſtances à l'Origine pourront être ou réelles, ou imaginaires.

Que ſi le Diviſeur Double du

plus haut Rang ne divisoit point le second Rang, en ce cas (*Pag.* 167.) les Branches du Lieu de la Proposée devroient être Paraboliques, & comme ce Diviseur ne sçauroit être Diviseur Triple du premier Rang, puisque par l'hypothese le premier Rang ne peut former qu'une Equation du second Degré, il suit déja de-là (*Pag.* 168) que le Parabolisme des Branches ne peut être que du premier Ordre, ou, ce qui est la même chose, que si la Proposée n'avoit point en effet pour Lieu une Parabole ordinaire, ou Conique, au moins les Branches de son Lieu devroient être nécessairement de l'espece de celles de la Parabole Conique, dont l'Equation est, comme on sçait, de cette forme ($y = ax^2$).

Mais, pour mieux connoître encore quel est dans ce cas le Lieu de la Proposée, qu'on change la

direction de l'une de ses Coordonnées (*Pag.* 324), de façon que cette Coordonnée devienne parallele à la derniere direction des Branches Infinies qui doivent se trouver dans le Lieu cherché, & la Transformée aura nécessairement cette forme ($by + gx^2 + cx + a = o$); de plus, si l'on transporte l'Origine dans le Sommet de la Ligne des y, c'est-à-dire, à la distance $\frac{a}{b}$ de l'Origine ancienne, & qu'ayant rendu quelconque la situation des x on détermine (*Pag.* 326) leur direction nouvelle par son *Atitude* à faire manquer la partie du dernier Terme où l'Inconuë nouvelle pourroit avoir un Coefficient Constant, on parviendra de cette maniere à la forme suivante ($by = gx^2$), & cette Equation sera au Diamétre qui passera par l'Origine ancienne, & à la suite d'Ordonnées dont il sera en effet Diamétre.

Et on feroit parvenu à une forme femblable fi, après avoir trouvé la Transformée ($by + gx^2 + cx + a = o$), on avoit tranfporté l'Origine dans un point quelconque, & qu'on eût déterminé (*Pag.* 232.) dy, & dx, ou bien q, & p par leur *Aptitude* à faire manquer les deux dernieres parties du dernier Terme de la Tranfformée : mais cette Equation feroit alors au Diamétre des x mêmes, lequel peut être bien different de celui qui pafferoit par l'Origine ancienne.

Enfin, fi l'on changeoit dans la premiere Transformée la direction des x, qu'on tranfportât en même tems l'Origine dans un point quelconque, qu'on déterminât enfuite de la façon que nous venons de le prefcrire tout-à-l'heure deux des trois Indéterminées que ces Transformations introduiroient, & que la troi-

siéme on la déterminât encore par son *Aptitude* à rendre Droit l'Angle des Coordonnées nouvelles, cela donneroit l'Equation à l'Axe même de la Parabole proposée.

Pour le second des cas que nous avions distingué ci-dessus, il est d'abord évident que la Courbe qui y répond doit avoir quatre Branches Hyperboliques, & deux Assymptotes Droites, (*Pag.* 162, 193); de plus, si le plus haut Rang est divisible par le second, l'Origine sera placée dans une des Assymptotes, & elle le sera dans les deux à la fois si le second Rang manque en entier: enfin, si, l'une de ces choses arrivant, le dernier Rang, ou le membre Constant manquoit encore dans la Proposée, le Lieu deviendroit le Systême de deux Droites, ce qui arriveroit encore si la Proposée avoit un Diviseur quelconque.

Et s'il'on changeoit à la fois la direction des deux Coordonnées (*Pag.* 338), qu'on transportât encore l'Origine dans un point quelconque, & qu'on déterminât les quatre Indéterminées que cela introduiroit par leur *Aptitude* soit à rendre les Coordonnées nouvelles paralleles chacune à une Assymptote, soit à placer l'Origine nouvelle dans le concours des deux Assymptotes (ces deux choses sont toujours possibles, puisqu'on a vû que dans le cas présent le Lieu de la Proposée devoit avoir quatre Branches Hyperboliques), par là on pourroit venir à bout de faire manquer dans la Transformée les membres ey^2, gx^2, & by, ex, de sorte qu'elle prendroit cette forme ($fxy + a = 0$), & cela prouve que le Lieu de la Proposée ne peut être en ce cas qu'une Hyperbole Conique.

Que

Que si c'étoit par les Propriétés des Diamétres, ou des Axes qu'on voulût s'assurer si le Lieu de la Proposée seroit en effet une Hyperbole Conique, alors on pourroit commencer par transporter l'Origine dans le Centre du Lieu (ce qui se feroit en substituant à la place de dx, & de dy dans la Somme des Differentielles les valeurs qui ont été assignées à la Page 12 pour l'x, & l'y convenables au Centre General), & cela feroit manquer d'abord le second Rang de la Transformée.

On rendroit de plus quelconque la situation de l'une des Coordonnées, pour en déterminer ensuite la direction nouvelle par son *Aptitude* à faire manquer dans la Transformée le membre où pourroit être le Produit de ses deux Coordonnées, & cela conduiroit à l'Equation du Diamétre de l'une des Coordonnées anciennes.

Ou bien on rendroit à la fois quelconques les situations des deux Coordonnées, & ayant déterminé de la façon que nous venons de dire l'une des deux Indéterminées que cela introduiroit dans la Transformée, on détermineroit l'autre par son *Aptitude* à rendre Droit l'Angle des Coordonnées nouvelles, & on parviendroit ainsi à l'Equation des Axes d'une Hyperbole, qui, lorsque dans cette Equation les Quarrés des deux Inconnues devroient avoir le même Coefficient, deviendroit Equilatere.

Et quant au troisiéme cas que nous avons distingué plus haut, & où il n'y a plus de Branches Infinies de possibles, employant dans ce cas la même Méthode dont nous venons de nous servir en dernier lieu pour l'Hyperbole, on s'assureroit par les Proprietés des Diamétres, ou des

Axes qu'il ne peut comprendre que des Ellypses ordinaires, ou bien des Cercles.

Or ces divisions des Lignes du second Ordre étant faites, si l'on déterminoit de plus, comme il seroit aisé de le faire, la grandeur des Axes, la situation, & les Proprietés des Foyers. . . &c ; qu'on rapellât encore, & qu'on appliquât ici ce que nous avons dit (*Pag.* 252) sur les Tangentes, & (*Pag.* 200 *& suiv.*) sur les Ombres ou les Projections des Courbes; que par la connoissance du Sinus de l'Angle que font les Diamétres sur leurs Ordonnées on démontrât la belle Proposition de l'égalité de tous les Parallelogrammes inscrits dans l'Ellypse, ou circonscrits à l'Hyperbole avec le Rectangle des Axes de ces deux Sections. . . . &c ; qu'en égalant le second Terme d'une Equation de l'Hyperbole avec le second

Terme du Produit des Equations de ses deux Assymptotes on démontrât pareillement les Proprietés principales de cette Courbe raportée à ses Assymptotes; qu'enfin on tirât de-là quelques Corollaires très-simples, il en résulteroit en peu de Pages un Traité des Sections Coniques assez complet, & plus Analytique que ceux qui ont paru jusqu'à présent.

Et on remarquera en passant que la Méthode que nous venons d'indiquer pour démontrer les Proprietés de l'Hyperbole considerée par raport aux Assymptotes pourroit servir aussi à démontrer dans les Ordres superieurs les Proprietés, pour ainsi dire, Assymptotiques que M. Newton a annoncées pour le troisiéme Ordre dans l'Art. 2. du Paragr. 2. de son Enumeration.

Quant aux Divisions generales des Lignes du troisiéme Ordre,

avant d'entreprendre de les faire il faut d'abord obſerver que, ſi le plus haut Rang d'une Equation quelconque du troiſiéme Degré étant lui-même réduit en Equation n'a point trois Racines égales, il en aura néceſſairement une réelle qui ne pourra être égale à aucune des deux autres, & qui déſignera par conſéquent dans la Courbe (*Pag.* 163, 229) deux Branches Hyperboliques, qui appartiendront à une Aſſymptote Simple.

Or, ſi l'on change la ſituation des Ordonnées, de façon que les Ordonnées nouvelles deviennent paralleles à une Aſſymptote déſignée par une Racine pareille, & qu'on porte de plus l'Origine dans cette Aſſymptote même, la reculant, ou l'avançant ſur la Ligne des x autant qu'il ſera néceſſaire pour cela, par ces deux Transformations on fera d'abord

manquer dans la Transformée les membres où le Cube, & le Quarré de son Ordonnée auroient pû se trouver avec des Coefficiens Constans.

De plus, si l'on rend quelconque la situation des x, qu'on porte l'Origine dans un point quelconque de l'Assymptote, & qu'on détermine ensuite les deux Indéterminées que cela introduira par leur *Aptitude* à faire disparoître de la Transformée les membres où le Quarré de son Ordonnée, & cette Ordonnée elle-même, seroient multipliés par leur Abscisse Linéaire, on changera de cette façon la Proposée en une Equation de cette forme ($xyy + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$), qui est en effet celle que M. Newton a donnée à son premier cas general, & dans laquelle, ainsi que l'a remarqué ce grand Géométre, l'Ordonnée $\frac{e}{x}$ à

l'Assymptote d'une Hyperbole Conique est égale à la Somme, ou à la Difference des deux Ordonnées du Lieu ; de façon que cette Hyperbole Conique elle-même doit faire les fonctions de Diamétre par raport à la suite particuliere d'Ordonnées à laquelle la Ligne du troisiéme Ordre est maintenant raportée.

Mais dans cette Formule, où l'expression de la premiere Racine du plus haut Rang Horizontal est devenuë égale à zero, les deux autres Racines de ce Rang peuvent être ou réelles & inégales, ou bien imaginaires, ou bien enfin réelles & égales, ce qui produit trois Subdivisions analogues aux Divisions que nous avons déja faites des Sections Coniques, mais dans lesquelles nous suivons un Ordre different pour nous conformer à celui que M. Newton a observé.

La premiere Subdivision, dont la condition est que *a* soit un nombre positif, comprend tous les Systêmes possibles des Hyperboles que M. Newton a nommées Redundantes, parce qu'ayant trois Assymptotes Droites elles en ont une de plus que l'Hyperbole Conique.

Et puisqu'il peut se faire dans cette Subdivision, ainsi que nous l'avons prouvé plus haut (*Pag.* 329), ou que les trois suites d'Ordonnées paralleles aux trois Assympotes n'ayent point de Diamétre Rectiligne, ou bien que l'une de ces suites seulement aye un Diamétre pareil, ou bien enfin que les trois suites en ayent à la fois, & cela dans les conditions précises que nous avons déja déterminées, on peut tirer delà une Subdivision nouvelle en trois Genres Inferieurs.

D'ailleurs comme, en suppo-

ſant le plus haut Rang diviſible par le ſecond, ce qui donneroit la Condition ($b = 0$), l'on placeroit l'Origine non-ſeulement dans l'une des deux Aſſymptotes, mais même dans les trois à la fois (*Pag.* 164), & que le Triangle que ces trois Aſſymptotes formeroient ſans cela par leurs trois rencontres s'évanoüiroit alors; ce cas ſingulier a paru à M. Newton pouvoir être encore la ſource d'une Subdiviſion ulterieure, & il en a fait même une derniere pour diſtinguer des autres cas celui où d venant de plus à s'évanoüir l'Origine devroit devenir un Centre General, ſelon que nous l'avons fait voir plus haut (*Pag.* 15).

La ſeconde Subdiviſion Generale comprend les Lignes du troiſiéme Ordre dans leſquelles il ne paroît que deux Branches Infinies, & qui ſont Hyperboliques,

& où les quatre autres Branches que ces Courbes pourroient avoir manquent au contraire, mais parce que la direction de leur Assymptote est devenuë Imaginaire (*Pag.* 162). Ces Hyperboles sont nommées par M. Newton Défectives, à cause que, n'ayant qu'une Assymptote, elles en ont moins que l'Hyperbole Conique, & leur condition d'existence est que *a* soit un nombre négatif: mais comme *e* peut se trouver, ou manquer dans leur Equation, ou bien, ce qui est la même chose, comme les Ordonnées paralleles à l'Assymptote peuvent n'avoir point de Diamétre, ou en avoir un en effet, il s'ensuit que cette Subdivision en doit produire deux autres.

Enfin la troisiéme Subdivision generale, qui suppose que *a* soit $= o$, offre d'abord deux nou-

veaux cas bien differens l'un de l'autre, à en juger au moins par les figures qui résultent de chacun d'eux. Le premier est que, b n'étant pas $=o$, le plus haut Rang de la Formule ne soit point divisible par le suivant, & alors (*Pag.* 267) il doit y avoir dans le Systême proposé deux Branches Paraboliques conjuguées aux deux Hyperboliques; leur Assymptote Courbe sera une Parabole Conique, & elles tendront à devenir dans leurs extrémités paralleles aux x.

De plus, les Ordonnées paralleles à l'Assymptote pouvant ou ne point avoir, ou avoir un Diamétre Rectiligne, ce premier membre de la troisiéme Subdivision generale se subdivise encore en deux autres. Mais si, b étant $=o$, le second Rang de la Formule doit manquer essentiellement, & qu'ainsi le plus haut Rang ne

puiſſe diſparoître ſeul par les ſuppoſitions qui ſeroient propres à l'anéantir, en ce cas la Racine Double du plus haut Rang déſignera dans le Lieu de la Propoſée (*voy. Pag.* 169), outre l'Aſſymptote qui y a été déja remarquée, un Syſtême de deux autres Aſſymptotes paralleles & entr'elles, & à la ligne des x, leſquelles ou ſeront diſtantes l'une de l'autre, ou bien retomberont l'une ſur l'autre, ou même ſeront placées à une diſtance imaginaire de l'Origine; ſelon que la lettre c ſera ſuppoſée poſitive, nulle, ou négative.

Or en ce dernier cas il ne paroîtra encore, de même qu'il eſt déja arrivé plus haut (*voy. Pag.* 442), que deux Branches Infinies dans la Courbe : mais cela viendra dans le cas préſent de ce que la diſtance de l'Origine aux Aſſymptotes des quatre Branches

qui manqueront sera devenuë imaginaire, & non de ce que la direction de ces Assymptotes le soit devenuë.

De plus, comme dans ces trois Subdivisions nouvelles les Ordonnées paralleles à l'Assymptote qui est seule de sa direction peuvent ne point avoir, ou avoir un Diamétre Rectiligne: comme d'ailleurs la premiere, & la seconde sont susceptibles de Centre General, ces deux considerations peuvent donner encore lieu à des Subdivisions ulterieures.

Enfin toutes les Courbes comprises dans les trois dernieres Subdivisions sont nommées par M. Newton des Hyperbolismes de Sections Coniques, parce que leurs Ordonnées peuvent être regardées comme provenantes de la division d'une Ordonnée de Section Conique par l'Abscisse correspondante; & combinant ce

que nous avons dit dans les Divisions des Sections Coniques avec ce que nous venons d'ajoûter sur les trois états par où la lettre *c* pouvoit passer, on se convaincra avec M. Newton que les Hyperbolysmes qui ont trois Assymptotes sont des Hyperbolismes d'Hyperbole, que ceux qui n'ont que deux Assymptotes, dont l'une est Double, sont des Hyperbolismes de Parabole, lesquels s'ils doivent avoir Diamétre deviennent des Hyperboles Cubiques, & que ceux qui n'ont qu'une Assymptote sont des Hyperbolismes d'Ellypse.

Revenant maintenant à notre Division generale dont le premier membre vient d'être épuisé, si l'on suppose au plus haut Rang Horizontal de la Proposée trois Racines égales, cela donnera lieu, en suivant l'Ordre établi par M. Newton, à distinguer trois nouveaux Cas generaux.

Le prémier de ces trois nouveaux Cas, c'est-à-dire, le second Cas general de M. Newton suppose que la Racine Triple du plus haut Rang Horizontal ne divise point le Rang immédiatement inferieur, & pour lors, il est évident (*Pag.* 148) qu'il ne pourra y avoir dans le Lieu de la Proposée que deux Branches Infinies, lesquelles seront nécessairement Paraboliques, & auront pour Assymptote Courbe les deux Branches d'une Parabole Seconde Cubique.

Et si dans ce cas on rendoit l'Ordonnée parallele à la derniere direction des Branches Infinies, que de plus on transportât l'Origine d'un point à un autre de la Directrice des nouvelles Ordonnées, & qu'on changeât la direction des Abscisses mêmes, de façon à donner à ces nouvelles Ordonnées un Diamétre Rectiligne, ce qui se trouveroit

toujours possible, si l'on sçavoit tout cela, ainsi qu'on en a donné plus haut les moyens, la Transformée qui en resulteroit ne pourroit manquer d'avoir cette forme ($yy = ax^3 + bx^2 + cx + d$), qui est celle que M. Newton donne effectivement en ce cas; & on pourroit même faire disparoître tel membre qu'on voudroit de son dernier Terme, en reculant ou avançant à propos l'Origine sur la Ligne des *x*.

Le troisiéme Cas general de M. Newton a lieu lorsque la Racine Triple du plus haut Rang Horizontal de la Proposée doit diviser le Rang immédiatement inferieur, & cependant n'en être que Racine Simple.

Dans ce cas on voit d'abord (*Pag.* 174) que la Courbe doit avoir à la fois deux Branches Paraboliques, & deux Hyperboliques sans Diamétre qui ayent pour

Assymptotes

Aſſymptotes Courbes une Parabole, & une Hyperbole Coniques. De plus ſi l'on prend les y parallèles à la derniere direction des Branches Infinies, & qu'on place l'Origine dans l'Aſſymptote Droite des Branches Hyperboliques, l'Equation de ce cas prendra alors cette forme ($xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$), qui eſt auſſi celle que donne M. Newton: mais on pourroit encore faire diſparoître de ſon dernier Terme les deux membres du milieu, ſi on changeoit la direction des Abſciſſes, en prenant pour rapport de m à n celui de 1 à b, & qu'on avançât l'Origine dans l'Aſſymptote de la quantité c.

Enfin la ſeule Eſpece que ce cas fourniſſe eſt la Parabole de Deſcartes ou le Trident (*v. Fig.* 54.).

Pour le quatriéme & dernier Cas general, ſa condition d'exiſtence eſt que la Racine Triple du

plus haut Rang Horizontal soit, Racine Double du Rang immediatement inferieur; de sorte que prenant dans ce cas les y paralleles aux directions des Branches infinies, lesquelles (*Pag.* 174) doivent être Paraboliques, & de l'Espece de celles de la Parabole premiere Cubique, on parviendra par ce moyen à une Equation de cette forme ($y = ax^3 + bx^2 + cx + d$), qui est en effet celle que M. Newton assigne pour ce cas. Mais nous avons déja fait voir plus haut qu'il étoit une Transformation possible qui lui feroit perdre encore les derniers membres de son dernier Terme, de façon qu'elle se réduiroit à l'Equation ordinaire de la premiere Parabole Cubique, c'est-à-dire, à celle-ci ($y = ax^3$).

Et quant aux dernieres Subdivisions des deux premiers Cas generaux en Especes, nous ne nou-

y arrêterons pas ici, parce que d'un côté nous avons prouvé plus haut (*Pag.* 366) que le défaut d'une Définition exacte de ce mot *Espece* les rendroit toujours arbitraires, & que d'ailleurs les principes dont M. Newton les a déduites (*Pag.* 367.) étant très-faciles à entendre, & à suivre, nous croyons pouvoir renvoyer nos Lecteurs à son Traité, où sont avec cela toutes les Figures nécessaires, & qu'il auroit été embarassant de joindre ici de nouveau.

Nous n'entreprendrons pas non plus de donner les Divisions des Ordres supérieurs au troisiéme. Ce n'est pas cependant que ces Divisions ne pussent se trouver aussi en employant la même Méthode que nous venons de suivre : mais effrayés du détail immense où cela nous jetteroit nous pen-

sons devoir nous contenter d'avoir indiqué les moyens qu'il faudroit suivre pour réussir dans une recherche pareille.

REMARQUE

Où l'on fait voir que les changemens d'Axes, & les Transports d'Origine qu'on a enseigné de faire dans le cours de cet Ouvrage peuvent être utiles aussi pour faciliter la Solution des Problêmes de Calcul Intégral.

M. Newton dans son excellent Traité de la Quadrature des Courbes a, comme on sçait, enseigné les moyens de réduire à des Quadratures très-simples les Quadratures de toutes les Courbes dont les Equations Differentielles ne contiendroient que trois Termes. Or puisque nos Méthodes peuvent servir à réduire dans plusieurs cas à trois Termes des

Differentielles qui en auroient quatre, cinq, ſix, & même juſqu'à ſept, il s'enſuit que ces Méthodes pourront être employées utilement dans la Solution de différens Problêmes de ce genre ; & en general toutes les fois qu'une Differentielle ne ſe trouvera pas ſous une forme directement Integrable, il ſera à propos de la transformer de la maniere que nous avons décrite (*Pag.* 340), c'eſt-à-dire, le plus generalement qu'il ſe pourra en lui conſervant néanmoins toujours des Coordonnées Droites, ou même, dans certains cas particuliers qu'on diſcernera aiſément, d'une façon encore plus ſimple, pour voir enſuite ſi une détermination convenable des quatre Indéterminées que cette Transformation aura introduites ne pourra point faire acquerir à la Propoſée la forme Integrable qu'elle n'avoit point auparavant.

Cet usage de nos Méthodes est si facile à comprendre qu'il seroit inutile d'en faire ici l'application à des Exemples. D'ailleurs nous aurons occasion de l'expliquer plus au long dans un Ouvrage sur le Calcul Integral dont nous avons déja parlé à la Page 303, & où il trouvera naturellement sa place.

FIN.

ADDITION

Où l'on démontre l'Analogie qui a été observée (Pag. 7, 8, & 236.) *entre les Differentiations faites d'une maniere qu'on a décrite en ces endroits, & la Transformation qui seroit propre à transporter l'Origine d'une Courbe dans un Point quelconque du Plan de cette Courbe.*

1°. Un membre de Differentielle lequel contiendroit $x^f y^g dx^r dy^s$ doit provenir de la $\overline{r+s}$ième Differentiation d'un membre d'Intégrale, lequel contiendroit $x^{f+r} y^{g+s}$.

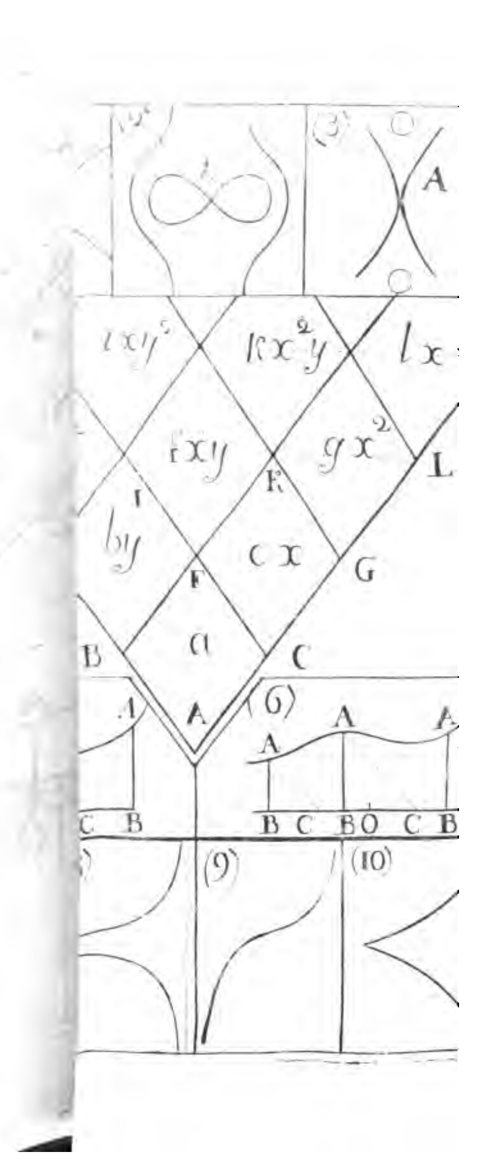
2°. Chaque membre d'Intégrale pouvant fournir deux parties à la premiere Differentielle, chacune de ces deux parties en pouvant fournir deux autres à la seconde Differentielle, & ainsi de suite, on doit conclure de-là que la $\overline{r+s}$ième Differentielle d'un seul membre d'Intégrale peut *en général* être composée d'un nombre de parties exprimé par 2^{r+s}.

3°. On prouvera d'une maniere analogue à celle dont on s'est servi pour découvrir les Coefficiens des differentes Puissances entieres d'un Binome que de ces 2^{r+s} parties il ne pourra y en avoir qu'une qui contienne dx^{r+s}, que $r+s$ qui contiennent $dx^{r+s-1} dy$, que $\overline{r+s}.\frac{\overline{r+s-1}}{2}$ qui contiennent $dx^{r+s-2} dy^2 \ldots$ &c; de façon que celles qui contiendront $dx^r dy^s$ devront être en nombre exprimé par

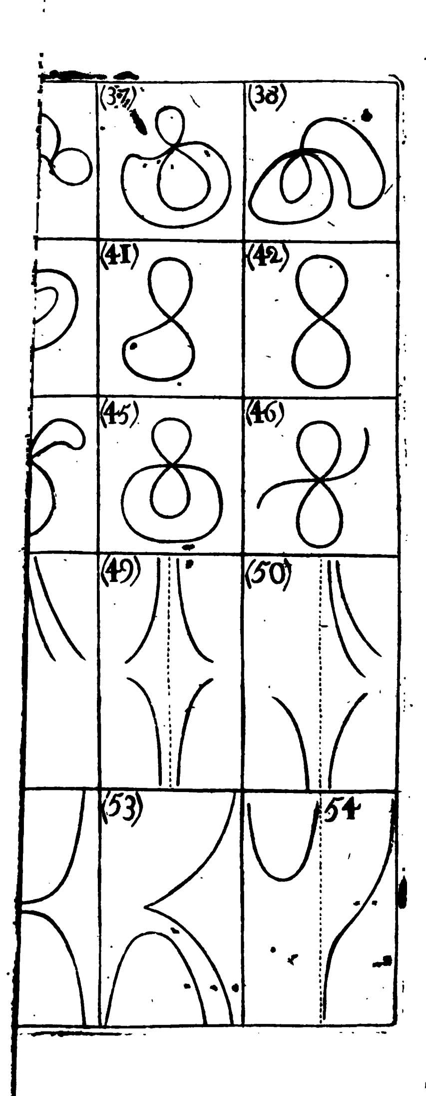
$$\frac{\overline{r+s}.\ \overline{r+s-1}.\ \overline{r+s-2} \ldots \&c.\ \overline{r+1}}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots \&c.\ s}$$

4°. Mais, si A est le Coefficient du membre de l'Intégrale, chacune de ces dernières parties aura pour Coefficient $A \times \overline{f+r}.\ \overline{f+r-1}.\ \overline{f+r-2} \ldots \&c.\ f \times \overline{g+s}.\ \overline{g+s-1},\ \overline{g+s-2} \ldots \&c.\ g$. Donc le Coefficient complet de leur Somme totale sera celui-là multiplié par le nombre que nous venons de rapporter.

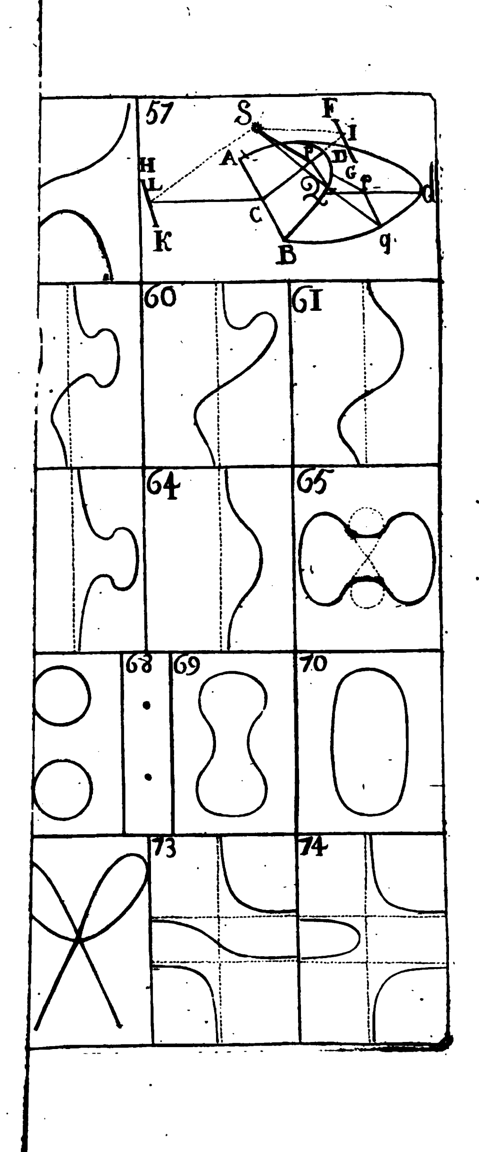
5°. Un membre de la Transformée qu'on auroit en substituant $p+nu$, &



(3)
A
lxy^2
kx^2y
lx
fxy
gx^2
L
K
I
by
cx
F
G
a
B
C
A
A
(6)
A
A
A
C
B
B
C
B
O
C
B
(9)
(10)



(37)
(38)
(41)
(42)
(45)
(46)
(49)
(50)
(53)
54


57
S
F
I
H
L
A
P
D
G
C
K
B
q
d
60
61
64
65
68
69
70
73
74

$q + mu$ (*Pag.* 7.), ou bien $p + z$, & $q + u$ (*Pag.* 236.) au lieu de x, & de y, un tel membre s'il contenoit $p^f q^g n^r m^s u^{r+s}$, ou bien $p^f q^g z^r u^s$, devroit provenir du membre de la Proposée où se seroit trouvé $x^{f+r} y^{g+s}$, &, si celui de la Proposée avoit A pour Coefficient, celui de la Transformée auroit de son côté pour Coefficient $A \times \dfrac{\overline{f+r}.\overline{f+r-1}.\overline{f+r-2}\ldots}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots}$ $\dfrac{\&c.\ f.}{\&c.\ r.} \times \dfrac{\overline{g+s}.\overline{g+s-1}.\overline{g+s-2}\ldots}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots}$ $\dfrac{\&c.\ g.}{\&c.\ s.}$ Donc les differens membres de la *Somme des Differentielles*, & les membres analogues de la Transformée dont nous parlons proviennent des mêmes membres de la Proposée, & pour avoir ceux-ci il faut diviser ceux-là par les nombres 1, 1. 2, 1. 2. 3, 1. 2. 3. 4. . . &c. C. Q. F. D.

APPROBATION.

J'Ai lu par ordre de M. le Chancelier un Manuscrit intitulé : *Usages de l'Analise de Descartes pour découvrir sans le secours du Calcul Differentiel les Propriétés ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres* ; par M. l'Abbé DE GUA, & je juge que cet Ouvrage mérite d'être imprimé. A Paris le 3 Novembre 1739.

J. PRIVAT. DE MOLIERES.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre, à nos amez & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, Salut. Notre bien-amé le Sieur Abbé DE GUA nous ayant fait remontrer qu'il souhaiteroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage de sa composition, qui a pour titre *Usages de l'Analyse de Descartes... &c.* par ledit Sieur DE GUA, s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce nécessaires, offrant pour cet effet de le faire imprimer en bon papier, & beaux caracteres, suivant la feuille imprimée & attachée pour modele sous le contre-scel des Présentes ; à ces causes, voulant traiter favorablement ledit Sieur Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer ledit Ouvrage ci-dessus specifié, conjointement, ou séparément, & autant de fois que bon lui semblera, & de le faire vendre, & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de neuf années consécutives, à compter du jour

de la date desdites Présentes. Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance, comme aussi à tous Imprimeurs, Libraires, & autres d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire ledit Ouvrage ci-dessus expliqué en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns Extraits sous quelque prétexte que ce soit d'augmentation, correction, changement de titre, ou autrement, sans la permission expresse & par écrit dudit Sieur Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Sieur Exposant, & de tous dépens, dommages & interêts; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires, & Imprimeurs de Paris dans trois mois de la date d'icelles; que l'Impression de cet Ouvrage sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs; & que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10. Avril 1725, & qu'avant que de l'exposer en vente, le Manuscrit ou Imprimé qui aura servi de copie à l'impression dudit Ouvrage, sera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur d'Aguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur d'Aguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres; le tout a peine de nullité des Presentes. Du contenu desquelles vous mandons, & enjoignons de faire joüir ledit Exposant, ou ses ayans-cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble, ou empêchement. Voulons qu'à la copie desdites Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement, ou à la fin dudit Ouvrage, soit tenuë pour duëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Sécretaires foi soit ajoûtée comme à l'Original.

Commandons au premier notre Huissier, ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : CAR tel est notre plaisir. Donné à Versailles le onzième jour du mois de Décembre l'an de grace mil sept cens trente-neuf, & de notre regne le vingt-cinquiéme. Par le Roi en son Conseil.

SAINSON.

Registré sur le Registre dixiéme de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 301. fol. 297. conformément au Reglement de 1723. qui fait défenses, Article IV. à toutes personnes de quelque qualité qu'elles soient autres que les Libraires & Imprimeurs de vendre, débiter, & faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leurs noms, soit qu'ils s'en disent les Auteurs, ou autrement. Et à la charge de fournir à ladite Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris les huit Exemplaires prescrits par l'Article CVIII. du même Reglement. A Paris, le 15 Décembre 1739.

SAUGRAIN, *Syndic.*

De l'Imprimerie de JOSEPH BULLOT, ruë des Prêtres S. Severin. 1740.